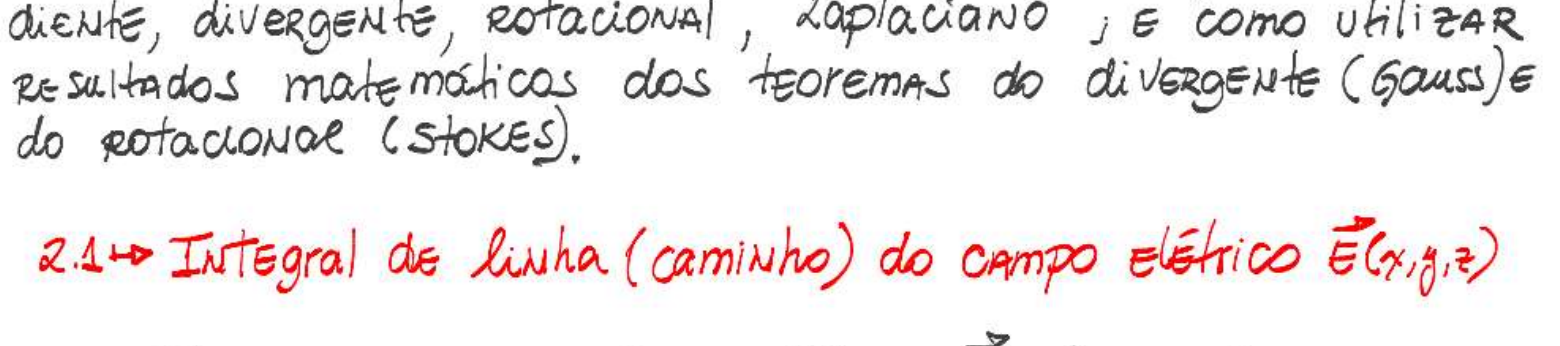
Capítulo 2

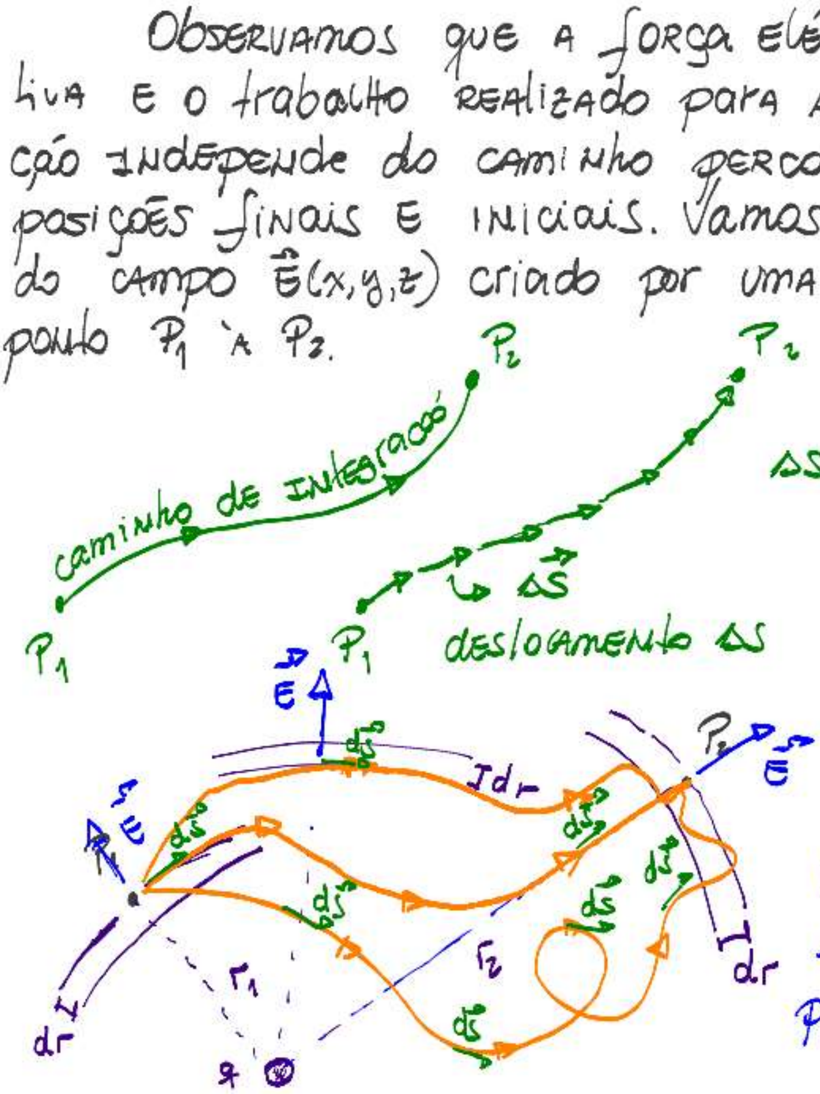
O Potencial eletrostático

Abordamos no capítulo anterior a lei de Coulomb em sua forma canônica e de forma equivalente a lei de Gauss, discutimos o significado do campo vetorial elétrico $\vec{E}(x,y,z)$ e sua representação visual, abordamos também a energia armazenada na forma de campo elétrico. Neste capítulo mergulharemos mais afundo nos aspectos matemáticos relacionados a certa distribuição de cargas, definiremos o campo escalar $\Phi(x,y,z)$ conhecido como potencial elétrico, revisitaremos conceitos matemáticos como operadores diferencias de gradiente, divergente, rotacional, Laplaciano ; e como utilizar resultados matemáticos dos teoremas do divergente (Gauss) e do rotacional (Stokes).

2.1 → Integral de linha (caminho) do campo elétrico $\vec{E}(x,y,z)$

Observamos que a força elétrica $\vec{F}_e$ é uma força conservativa e o trabalho realizado para a "montagem" de certa distribuição independe do caminho percorrido, dependendo apenas das posições finais e iniciais. Vamos calcular a integral de linha do campo $\vec{E}(x,y,z)$ criado por uma carga quando calculado de um ponto P_1 à P_2.





$$\int_{caminho} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int E\,\underbrace{ds.\cos\theta}_{dr} = \int E\,dr$$

No final essa integral depende apenas da distância radial do ponto P_1 e P_2 à carga, r_1 e r_2

Note o campo $\vec{E}$ é um campo central $\propto 1/r^2\,\hat{r}$, o produto escalar por qualquer caminho, terá componentes de $d\vec{s}$ tangencial à cascas esféricas c/ centro na carga (fonte) e normais/perpendiculares à mesma casca. $d\vec{s} = d\vec{s}_t + d\vec{s}_N = d\vec{s}_t + dr\,\hat{r}$, ou seja, ao computarmos $\hat{E}\cdot d\hat{s}$, ficamos com:

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}\cdot\left(d\vec{s}_t + ds\,\hat{r}\right) = E\,\underbrace{\cancel{\hat{r}\cdot d\vec{s}_t}}_{0\;\;\theta=\pi/2} + E\hat{r}\cdot dr\,\hat{r} = E\,dr$$

Carga elétrica pontual q cria um campo $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{1}\frac{1}{r^2}\,\hat{r}}$

A integral por $\boxed{\text{qualquer}}$ caminho de um ponto P_1 distante r_1 de q à um ponto P_2 distante r_2 de q é dado por:

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_C E\,dr = \int_C \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

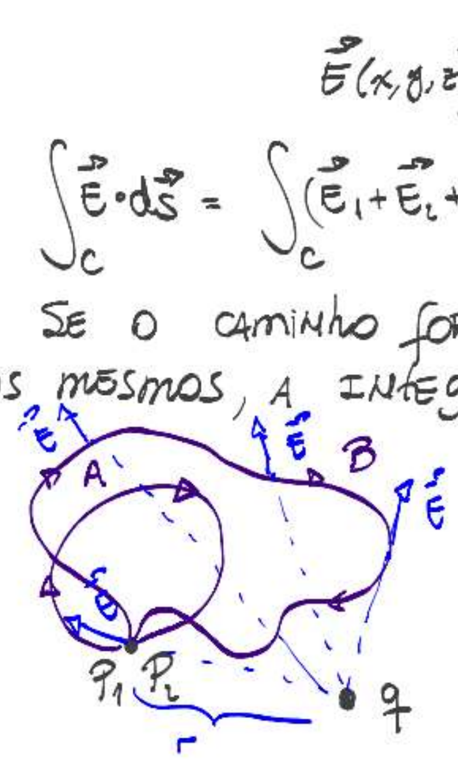
O resultado acima para uma única carga q depende apenas da posição P_1, P_2 e de nada mais, note que nessa montagem ambos os pontos na presença de q carregam um valor/qualidade/quantidade escalar associada ao ponto.

Pelo princípio da superposição o campo $\vec{E}$ em cada ponto pode ter sido gerado por uma distribuição de cargas:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_1(x,y,z) + \vec{E}_2(x,y,z) + \ldots + \vec{E}_N(x,y,z)$$

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_C \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N\right)\cdot d\vec{s} = \int_C \vec{E}_1\cdot d\vec{s} + \int_C \vec{E}_2\cdot d\vec{s} + \ldots + \int_C \vec{E}_N\cdot d\vec{s}$$

Se o caminho for fechado, ou seja, os pontos P_1 e P_2 são os mesmos, a integral é nula. (lógicamente, para campo central)



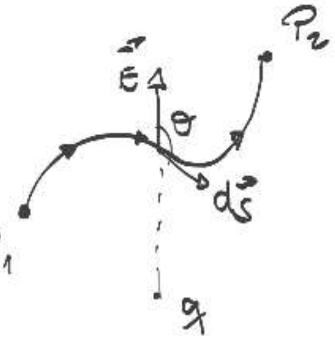
$$\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

↳ Integral no caminho fechado é sempre nulo num campo eletrostático.

Esse resultado é bem definido na eletrostática, por via de regra não é o mesmo para o campo criado por cargas em movimento, neste caso essa integral pode depender do caminho de integração.

2.2 → Diferença de Potencial e a função do potencial escalar Φ.

Como a integral de caminho do campo eletrostático $\vec{E}$ depende de apenas do caminho ou dos pontos P_1 e P_2 podemos associar à esses pontos a seguinte quantidade escalar:



$$\boxed{\underbrace{\Phi_{21}}_{\Phi_2-\Phi_1} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

, se multiplicarmos essa expressão por uma carga de prova q_p temos:

$$q_p\Phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}q\cdot d\vec{s} \equiv$$ trabalho para mover a carga de prova de P_1 p/ P_2.

$$q_p\Phi_{21} = W_{21} \rightsquigarrow \Phi_{21} = \frac{W_{21}}{q_p} \rightsquigarrow [\Phi_{21}] = \frac{J}{C},$$

$\Phi_{21}(P_1,P_2)$ é chamado de diferença de potencial entre os dois pontos, possui unidade de J/C em SI também conhecido como Volt. J/C $\equiv$ V (Volt), no sistema cgs erg/esu = statVolt, (erg = ergon (trabalho)),

* Note que Φ_{21} é uma função escalar que fornece sempre o valor de uma diferença entre uma quantidade em P_1 e outra em P_2. Temos portanto uma grande liberdade com relação ao referencial de um dos pontos. Se escolhermos todas as diferenças em função de um ponto fixo P_1, Φ_{21} passa apenas a depender da escolha do ponto P_2. (Isso nos permite escolher o zero do potencial de maneira inteligente, incluindo as transformações de calibre/gauge, sem alterar o sistema físico estudado). Note que pela definição de Φ_{21}, o campo elétrico $\vec{E}(x,y,t)$ sempre aponta na direção de maior para o menor potencial.

 # Exemplo: Vamos calcular o potencial eletrostático de uma distribuição uniforme esférica de cargas ρ, com raio R em todo espaço, vamos assumir que no infinito $r\to\infty$ esse potencial é nulo, referencial $\Phi(\infty)=0$, assim $\Phi(r)$, r = raio com centro na esfera.

Campo elétrico $\vec{E}(x,y,z)$ criado por uma densidade uniforme esférica ρ de raio R.

$$\vec{E}(r) \Rightarrow \begin{cases} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq R \\ = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r, & r \leq R \end{cases}$$

Assim temos que a diferença de potencial é dada por:

$$\boxed{\Phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}} \; //$$

Como existem dois regimes de campo elétrico para $r \geq R$ e $r \leq R$, vamos calcular o potencial fora da esfera $\Phi_{fora}(r)$ e dentro $\Phi_{dentro}(r)$.

Potencial fora da esfera $\Phi_{fora} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r'^2} dr' = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2} dr'$

$$\Phi_{fora}(r) = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'}\right)\Big|_{\infty}^{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} \rightsquigarrow \boxed{\Phi_{fora}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \; //$$

Potencial dentro da esfera $\Phi_{dentro}(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{R}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r}'$

$$\Phi_{dentro}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} - \int_{R}^{r} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r' dr' = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r'^2}{2}\Big|_{R}^{r} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\,3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2}$$

$$\boxed{\Phi_{dentro}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}} \; //$$

para $r = R$, $\Phi_{fora}(R) = \Phi_{dentro}(R)$ o potencial eletrostático é contínuo.

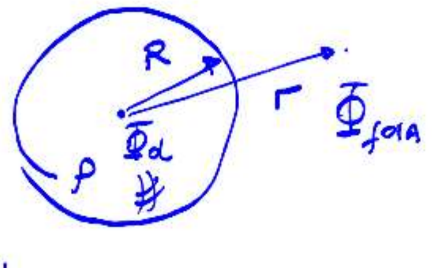
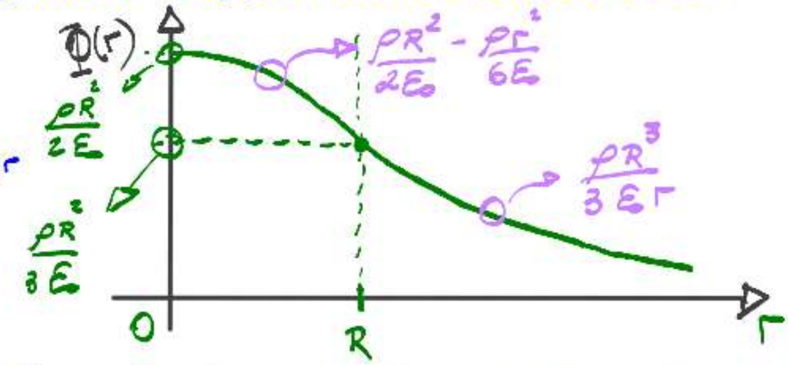


Gráfico da função escalar



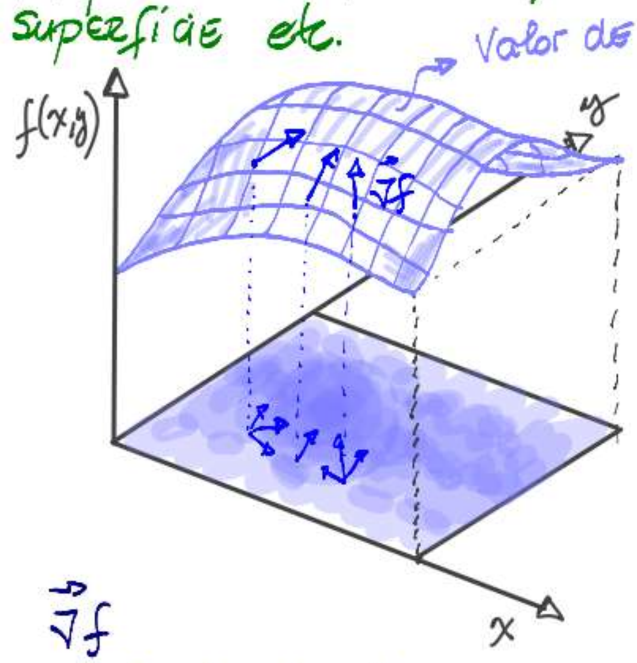
↳ $\Phi(r)$ é contínuo e $\Phi'(r)$ também é contínuo, como deveria ser já que $\vec{E}$ também é contínuo em todo espaço, contudo note que $\frac{dE}{dr}\Big|_{r=R}$ não é contínuo $\frac{dE}{dr}\Big|_{r_-\to R} \neq \frac{dE}{dr}\Big|_{r_+\to R}$ //

↳ Se uma carga de prova q_P positiva fosse posta próxima a esfera, uma força de repulsão agiria sobre a carga, de forma a levá-la para regiões de menor potencial, ou vice-versa se a carga for negativa.

2.3 → Gradiente de uma função escalar

Veja que o potencial elétrico é uma ferramenta importantíssima que reduz o trabalho de se calcular o trabalho gasto por uma carga q_q ao navegar em meio a esse sistema. Note também que a informação do potencial depende apenas da integral $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ que por sua vez dá o valor da componente de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{s}$. Assim ao saber $\vec{E}(x,y,z)$ em todo espaço obtemos $\Phi(x,y,z)$ por integração direta. O inverso também é verdadeiro, se soubermos como $\Phi(x,y,z)$ varia de um ponto à outro no espaço 3D, podemos recuperar a informação de $\vec{E}(x,y,z)$.

⇒ Considere uma função escalar bidimensional $f(x,y)$, ou seja para cada par (x,y), $f(x,y)$ fornece um valor, que pode ser por exemplo a temperatura em cada ponto de uma placa, ou a altura de alguma superfície etc.



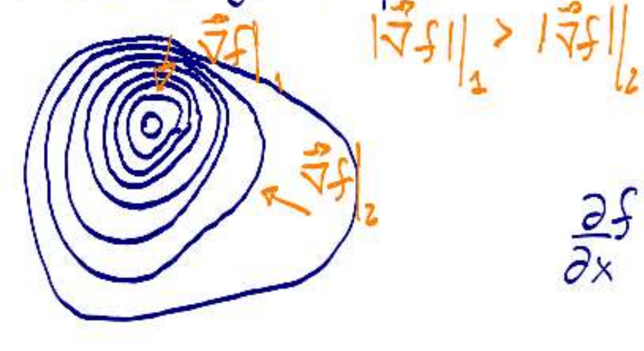
O operador gradiente de uma função escalar é definido como:

$$\vec{\nabla}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\ ,$$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\hat{x}$ ≡ variação de f c/ relação á coordenada x, na direção $\hat{x}$ com y e z ≡ constantes

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \quad //$$

* O Gradiente de uma função escalar é um vetor que aponta na direção de maior variação daquela função em relação as coordenadas espaciais. Podemos també associar o gradiente c/ por exemplo o caminho mais íngrime para subir uma montanha.



, Derivadas parciais exemplo:

Se $f(x,y,z) = Ax^2yz^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Axyz^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Ax^2z^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3Ax^2yz^2 \quad //$$

2.4 → Obtendo o campo $\vec{E}$ a partir de Φ.

Consideremos o valor de $\Phi(x,y,z)$ entre dois pontos, separados por uma distância infinitesimal $d\vec{s} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$, ou seja, entre $\Phi(x,y,z)$ e $\Phi(x+dx, y+dy, z+dz)$, a variação de Φ numa aproximação de primeira ordem é dada por:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz \,,$$ (derivada total do diferencial em 3D)

já vimos/definimos contudo o potencial Φ como:

$$\Phi = \int_C d\Phi = -\int_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_C -\vec{E}\cdot d\vec{s} \;\rightsquigarrow\; \boxed{d\Phi = -\vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = (-\vec{E})\cdot(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z})$$

$$-\vec{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}\right)$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi}$$

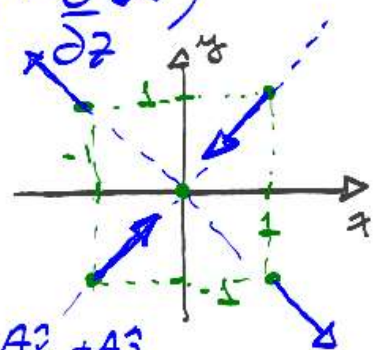
→ Esta relação é sempre verdadeira para o campo elétrico ($\vec{E}$) estático

 # Exemplo: Uma certa distribuição de cargas cria no espaço um potencial elétrico dado por $\Phi(x,y,z) = A\,xy$, $A = cte$. Encontre o campo vetorial $\vec{E}(x,y,z)$ em todo espaço.

$\Phi(x,y,z) = Axy$, $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}\right)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Ay$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Ax$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$

$$\boxed{\vec{E} = -Ay\,\hat{x} - Ax\,\hat{y}}$$



$\vec{E}(1,1,1) = -A\hat{x} - A\hat{y}$, $\vec{E}(0,0,0) = 0$, $\vec{E}(-1,-1,-1) = A\hat{x} + A\hat{y}$,
$\vec{E}(-1,1,0) = -A\hat{x} + A\hat{y}$, $\vec{E}(1,-1,0) = +A\hat{x} - A\hat{y}$,