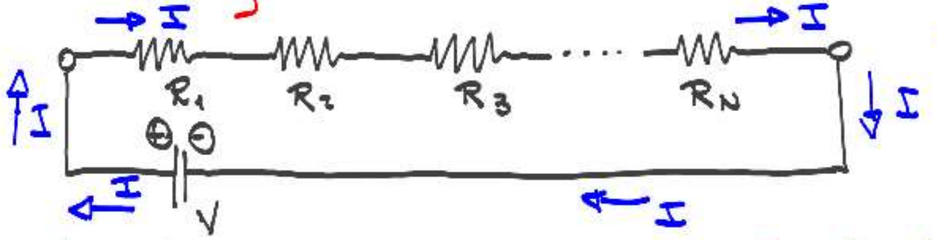
4.7 → Associação de resistores (série/paralelo)

Se precisamos, por algum motivo, de um resistor de resistência tal que não possuímos no momento, podemos juntar alguns resistores de forma que sua resistência equivalente R_{eq} realize o mesmo "objetivo". Ou ainda, se temos um emaranhado de elementos resistivos podemos reduzir o sistema em um único elemento que seja equivalente.

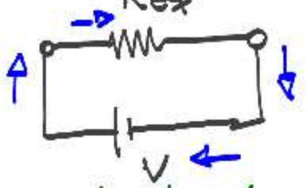
associação em série de resistores



* A corrente I é a mesma em todo ponto do circuito

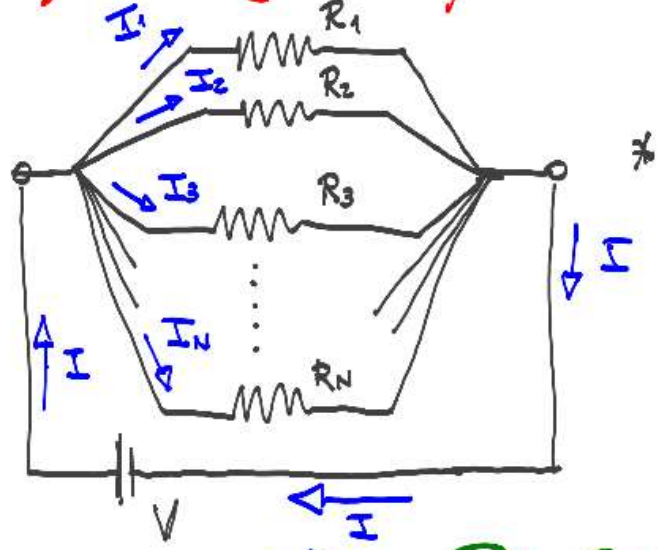
A potência fornecida pela fonte (VI) deve ser a mesma que a dissipada pelos resistores. Assim temos:

$$P_f = P_d \rightarrow VI = R_1 I^2 + R_2 I^2 + \ldots + R_N I^2 = R_{eq} I^2$$



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N = \sum_{i=1}^{N} R_i$$, resistência equivalente da associação em série.

Associação em paralelo de resistores



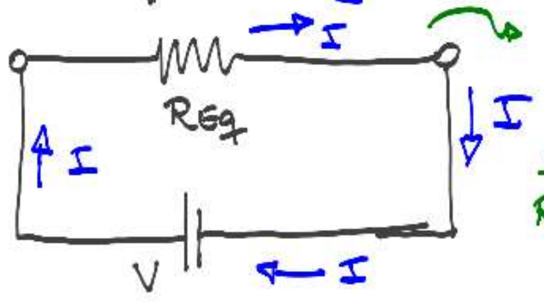
$$V = RI, \quad I = \frac{V}{R} = \frac{V}{R_i} \rightarrow \boxed{I_i = \frac{V}{R_i}}$$

* Conservação de energia

$$P_f = P_{dissipada}$$

Conservação da carga

$$VI = VI_1 + VI_2 + \cdots + VI_N \rightarrow \boxed{I = \sum_{i=1}^{N} I_i}$$



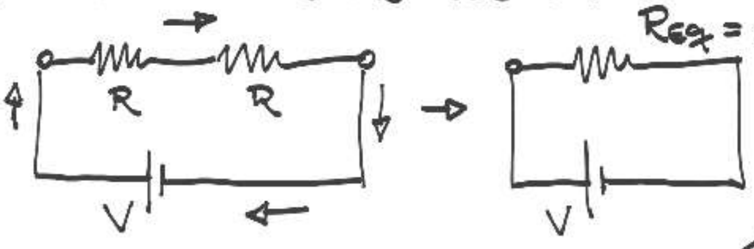
$$R_{eq} I^2 = VI \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{V}\frac{V}{R_1} + \frac{1}{V}\frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{1}{V}\frac{V}{R_N} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

Associação em paralelo

exemplo: Qual associação de resistores dissipa mais energia quando ligada à uma fonte d.c. Use como exemplo 2 resistores de mesma resistência R. pg26

Em série



$V = R_{eq} . I$

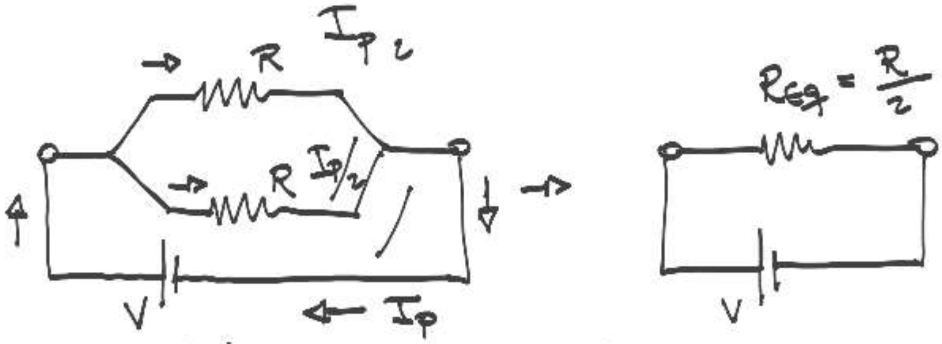
$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{2R}$

$\boxed{I_s = \frac{V}{2R}}$

Potência dissipada $= V I_s = \frac{V V}{2R} = \frac{V^2}{2R}$

em paralelo

$V = RI$



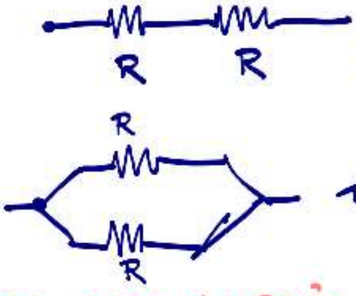
$I_p = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V.2}{R} = \frac{2V}{R}$, Potência dissipada $= P_d = VI = \frac{V 2V}{R} = \frac{2V^2}{R}$

Assim a razão entre as potências dissipadas em cada circuito vale:

$$\frac{P_d^p}{P_d^s} = \frac{2\cancel{V^2}\,2\cancel{R}}{\cancel{R}\,\cancel{V^2}} = 4 \qquad \boxed{P_d^p = 4 P_d^s} \;//$$

Note que a potência dissipada em um único resistor é dado por

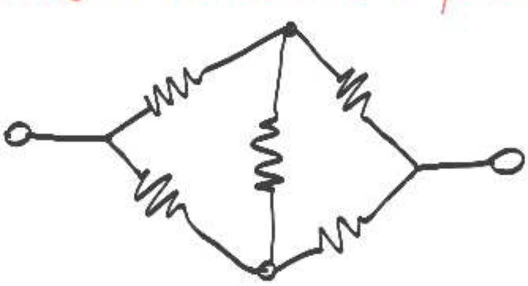
$P_d^1 = VI = \frac{V V}{R} = \frac{V^2}{R}$ ->



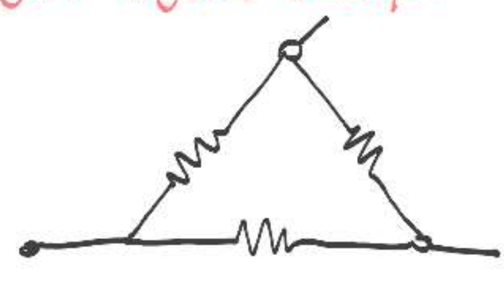
-> dissipa metade da potência de um único resistor

-> dissipa 2 vezes a potência de um único resistor

=> Contudo, nem todas as associações de resistores podem ser reduzidas p/ um resistor equivalente, utilizando as regras de associação em série e paralelos, a seguir alguns exemplos:



ou ainda



Vimos casos em que a simples redução para associações em série e paralelos de resistores (R) e capacitores (C) não é possível para a análise completa destes circuitos (quanto cada elemento dissipa de energia, qual a corrente elétrica que curta o elemento, ou ainda a queda de potencial entre seus terminais) devemos usar a boa e velha física. A seguir, discutimos um método de solução conhecido como regras de Kirchhoff (ou leis de Kirchhoff).

4.8 ⟶ Regras de Kirchhoff ou "leis" de Kirchhoff (Alemão Gustav Robert Kirchhoff 1824-1887)

Essas regras não são nada mais do que a aplicação de duas informações fundamentais em física. A conservação das cargas e a conservação da energia (Campo elétrico conservativo). Essas constatações físicas (leis) são expressas por duas "leis" de Kirchhoff, seguem:

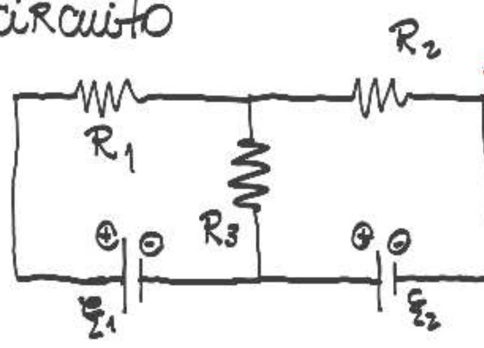
⇒ Lei das nós ⟶ Obedecendo a conservação da carga. Cargas que fluem na direção de um ponto do condutor deve também sair desse ponto num certo intervalo de tempo. Já que como vimos cargas elétricas não são criadas ou destruídas de forma trivial.

⇒ Lei das malhas ⟶ Ao percorrer uma malha ("loop") do circuito a energia deve ser conservada, em outra forma, a queda de potencial num caminho fechado deve ser obrigatoriamente nulo, seguindo a relação:

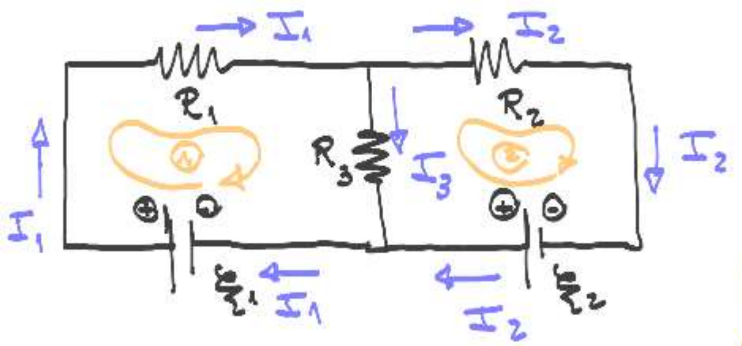
$$\Delta\phi = -\oint_{loop} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \;,\quad V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$$

⟶ Campo conservativo

\# Exemplo: Vamos aplicar as regras de Kirchhoff para o seguinte circuito



\# Quando o circuito está em funcionamento uma corrente estacionária irá se estabelecer em cada elemento. Podemos então "chutar" dar um "ansatz" para essas correntes e sua "direção" de fluxo.



* A pergunta é quanto vale a corrente I_1, I_2 e I_3 que flui em cada elemento do circuito. Com essa informação é também possível saber pela Lei de Ohm qual a queda de potencial entre os terminais de cada elemento do circuito $V=RI$.

Pela conservação da carga temos $\boxed{I_1 - I_2 - I_3 = 0}$ ①

No "loop" ① por conservação de energia ou $\Delta\phi = 0 = -\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

$$\boxed{\xi_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0} \quad ②$$

No segundo "loop" temos: $\boxed{\xi_2 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0}$ ③

Construímos então um sistema linear de três equações e três incógnitas I_1, I_2 e I_3. Em realidade neste caso duas incógnitas são importantes (I_2 e I_3) pois a equação ① é trivial.

$$\left.\begin{array}{l} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \xi_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 \\ \xi_3 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0 \end{array}\right\} \quad I_2 = \frac{\xi_2 R_1 + \xi_2 R_3 + \xi_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \quad I_3 = \frac{\xi_1 R_2 - \xi_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

↳ Se os sinais das correntes forem negativos, significa que a escolha inicial (chute) do sentido do fluxo foi equivocada, e o sentido real é o oposto.

⇒ Como na realidade a quantidade de incógnitas é menor, podemos aplicar o seguinte método (método das malhas) para resolver o sistema.

Loop ① ⇝ $\xi_1 - R_1 I_1 - R_3(I_1 - I_2) = 0$

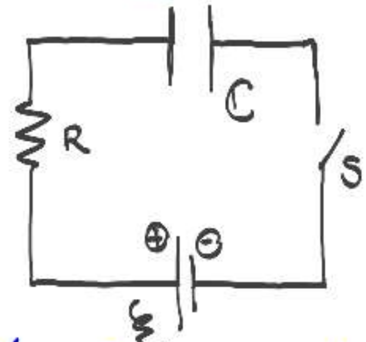
Loop ② ⇝ $\xi_2 - R_3(I_2 - I_1) - R_2 I_2 = 0$

* A corrente em R_3 é $I_3 = I_1 - I_2$ // ou seja, todos os caminhos levam à Roma

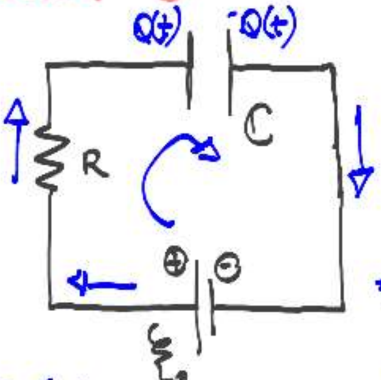
4.9 → Carregamento e descarregamento de capacitor circuito (RC).

Quando conectamos um capacitor numa fonte d.c. (bateria) existe um tempo característico para que o capacitor se carregue com sua carga final Q_f. O mesmo ocorre para o descarregamento do capacitor quando "curto circuitado" seus terminais.

Carregamento de capacitor C



fechando a chave Ⓢ há um fluxo I



$\frac{dQ}{dt} > 0$, I positivo neste sentido

P/ $t=0$, $Q(0)=0$

* mas em tempo muito pequeno a corrente é máxima através de R (todo o circuito), com a passagem do tempo a corrente diminui ao carregar o capacitor até sua carga final máxima Q_f.

Então para $t=0$, $I = \frac{\varepsilon_0}{R} \rightarrow \boxed{I(0) = \frac{\varepsilon_0}{R}}$

Pela regra das malhas temos que a d.d.p fornecida pela fonte é igual às "quedas" nos elementos e ficamos com.

$$\varepsilon_0 = V_R(t) + V_C(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}, \quad I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \rightarrow Q(t) = \int I(t)\,dt$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt + RI(t) \longrightarrow \frac{d\varepsilon_0}{dt} = 0 = \frac{1}{C}I(t) + R\frac{dI(t)}{dt}, \text{ ficamos:}$$

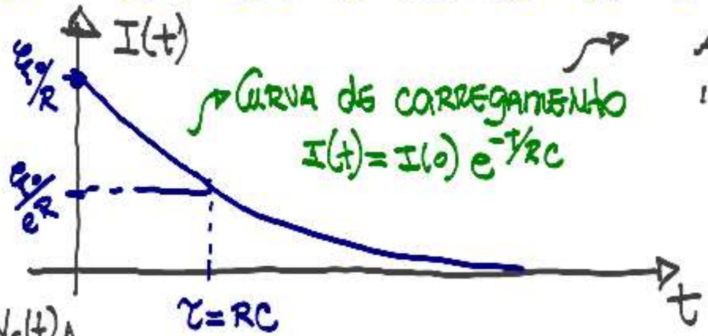
$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC}I(t) = 0 \rightarrow \frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{1}{RC}dt,$$

realizando a integração direta de 0 à t temos

$$\int_0^t \frac{1}{I}\,dI = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow \ln I(t) - \ln(I(0)) = \frac{-1}{RC}t = \ln\left(\frac{I(t)}{I(0)}\right) = \frac{-t}{RC} = \frac{-t}{\tau}$$

$$\frac{I(t)}{I(0)} = \frac{-t}{\tau} \rightarrow I(t) = I(0)\,e^{\frac{-t}{RC}} \rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}e^{-t/RC}}$$ //

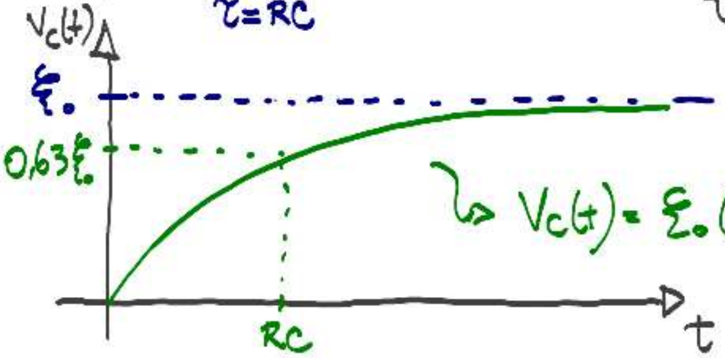
$\tau = RC$ é a chamada constante de tempo do circuito RC, pg 90 e marca o tempo em que a corrente $I(\tau) = I(0)/e$ cai com $1/e \approx 0{,}37$ da corrente inicial.



A tensão no resistor $V_R = RI$,
" " " capacitor $V_C = \mathcal{E}_0 - V_R$

$$V_C(t) = \mathcal{E}_0 - R\frac{\mathcal{E}_0}{R}e^{-t/RC}$$

$$\boxed{V_C(t) = \mathcal{E}_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$



$\rightarrow V_C(t) = \mathcal{E}_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

* No tempo RC, a tensão no capacitor cresce até $(1 - e^{-1}) = 0{,}63$ do valor final

A variação da carga no capacitor é dado por $V_C(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$

$$Q(t) = C\,V_C(t) = C\,\mathcal{E}_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

ou seja:

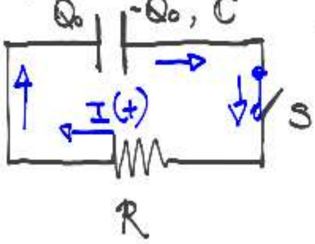
$$Q(t) = Q_f\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

onde, $Q_f = C\,\mathcal{E}_0$

$\Rightarrow$

Descarregamento do capacitor C.

Veja que depois de algum tempo o capacitor ligado à fonte d.c. fica carregado com uma carga final $Q_f = Q_0$, e a corrente no circuito se anula, bem como a queda de potencial no resistor. Vamos analisar agora o processo inverso, ou seja, de descarregamento do capacitor.



$\Rightarrow$ Quando a chave (S) é fechada a carga armazenada na placa positiva irá fluir pelo circuito no sentido anti-horário. Ocorrerá uma certa dissipação nos elementos resistivos (R) do circuito até que $Q(t) \to 0$, e o capacitor fique neutro novamente. Por conservação de energia temos:

Equação diferencial

$$-RI - \frac{Q(t)}{C} = 0 = RI + \frac{Q(t)}{C} = 0 = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \to \boxed{\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{RC}\,dt}$$

Resolvemos a equação diferencial aplicando as condições de contorno adequadas, $t=0$, $Q(0)=Q_0$

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{RC}dt \rightarrow \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{1}{Q(t)}dQ(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

$\rightarrow Q(0)=Q_0$

ou ainda: $\frac{Q(t)}{Q_0} = \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right) \rightsquigarrow \boxed{Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$ //

A queda de potencial no capacitor vale $V_C = \frac{Q(t)}{C}$, ou seja:

$\boxed{V_C = \frac{Q_0}{C}e^{-t/RC}}$ //, quando fechado o circuito $t=0$, toda d.d.p do capacitor está sob a resistência R, e uma corrente inicial $I_0 = \frac{V_C(0)}{R} = \frac{Q_0}{CR}$, deverá fluir no sentido anti-horário.

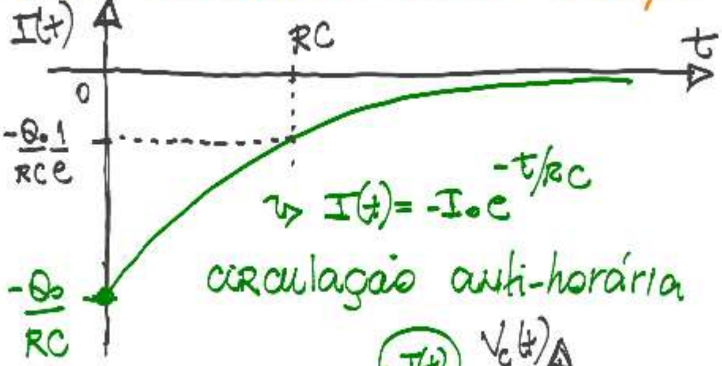
A corrente no circuito pode ser calculada por:

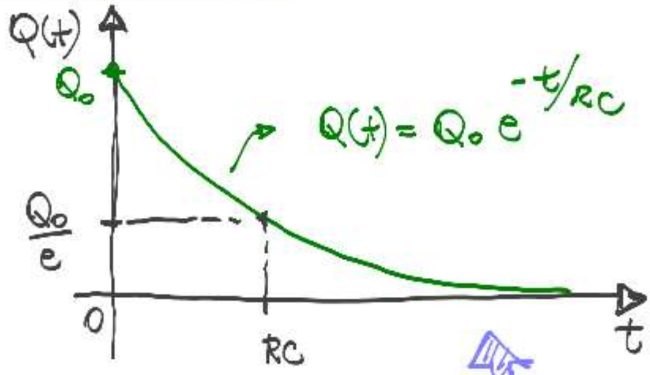
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}Q_0 e^{-t/RC} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} \rightarrow \boxed{I(t) = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = -I_0 e^{-t/RC}}$$

* podemos notar que para $t=0$, a corrente é máxima na direção oposta à da figura inicial, como deveria ser.

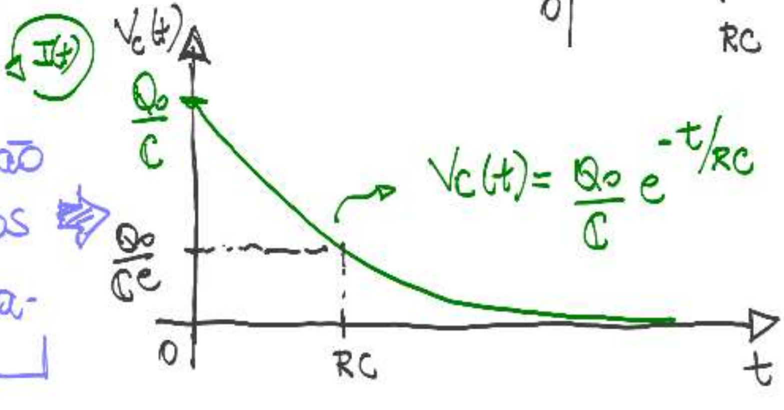
Carga: $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$, tensão: $V_C(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-t/RC}$, Corrente: $I(t) = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$

Lembrando que $RC \cong \tau \Rightarrow$ constante de tempo do circuito RC, também conhecido como tempo característico.





* Variação da carga na placa positiva do capacitor



* Queda de tensão potencial V_C nos terminais do capacitor