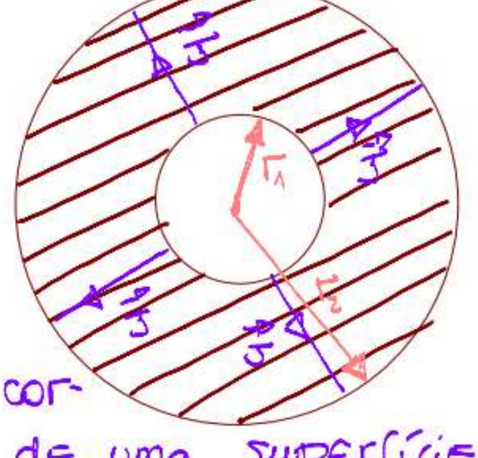
Exemplo: Vamos calcular a resistência de um elemento resistivo esférico, que possui um raio menor interno r_1 e raio externo r_2. pg 92

Vamos lembrar que a resistência (R) depende num primeiro momento da resistividade (ρ) do material, da espessura (ℓ) e da área de seção reta (A), área na qual cruza um campo $\vec{J}$ normal à área. Ou seja, $R = \rho . \ell / A$.



- Podemos utilizar essa informação para o condutor esférico, como mostra a fig. ao lado. Se uma diferença de potencial se estabelecer entre as superfícies r_1 e r_2 haverá o aparecimento de uma densidade de corrente radial $\vec{J}(r)$, consequentemente uma corrente I cruzará o condutor. A resistência de uma superfície esférica 2D interna onde $r_1 \leq r \leq r_2$ é dado por

$$dR(r) = \frac{\rho \, dr}{4\pi r^2},$$

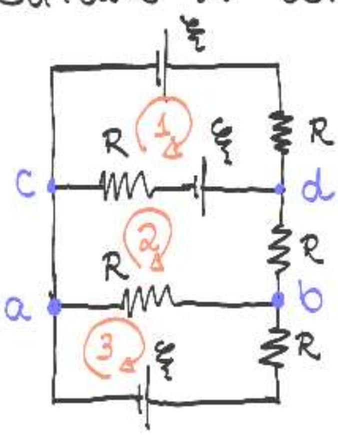
→ Para a resistência da esfera toda devemos somar as contribuições de cada casca esférica (por integração temos)

$$R = \int_{r=r_1}^{r_2} dR(r) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{\rho}{4\pi}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

A resistência do condutor esférico vale:

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \, //, \quad \text{se } r_2 \gg r_1 \text{ temos } \boxed{R(r_1) = \frac{\rho}{4\pi r_1}} \, //$$

Exemplo: Dado o seguinte circuito elétrico, composto por 3 fontes d.c. idênticas (mesma ξ - f.e.m) e 5 resistências iguais, calcule a corrente (I) e a tensão (V) entre os pontos a,b, c,d.



Utilizando as leis de Kirchhoff, podemos montar um sistema linear de equações, para as malhas (1), (2) e (3) temos:

$\xi - I_1 R - \xi - R(I_1 - I_2) = 0$, malha (1)

$-R(I_2 - I_1) + \xi - R I_2 - R(I_2 - I_3) = 0$, malha (2)

$-R(I_3 - I_1) - R I_3 - \xi = 0$, malha (3)

⇒ Ficamos com:

$RI_1 + RI_1 - RI_2 = 0 \rightarrow 2RI_1 - RI_2 = 0 \rightarrow 2I_1 - I_2 = 0$

$I_1 = I_2/2$, malha ①

$-R(2I_1 - I_1) + \xi - 2RI_1 - R2I_1 + RI_3 = 0$

$-2RI_1 + RI_1 + \xi - 2RI_1 - 2RI_1 + RI_3 = 0$

$-5RI_1 + RI_3 = -\xi$

$\boxed{5I_1 - I_3 = \xi/R}$, malha ②

$-RI_3 + RI_2 - RI_3 - \xi = 0 = -2RI_3 + RI_2 - \xi = 0$

$2RI_1 - 2RI_3 = \xi$

$\boxed{I_1 - I_3 = \frac{\xi}{2R}}$, malha ③

$$\left.\begin{aligned} -5I_1 + I_3 &= -\frac{\xi}{R} \\ I_1 - I_3 &= \frac{\xi}{2R} \end{aligned}\right\} \quad -4I_1 = -\frac{\xi}{2R} \rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\xi}{8R}}$$

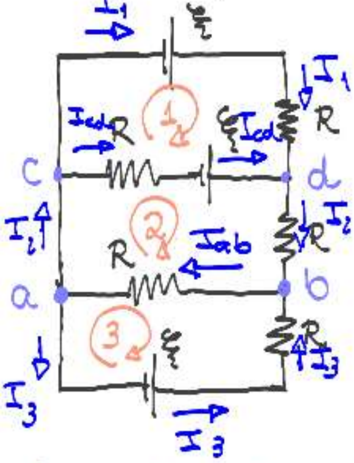
, Valor positivo (sentido horário)

$I_3 = 5I_1 - \frac{\xi}{R} = \frac{5\xi}{8R} - \frac{\xi}{R} = \frac{5\xi - 8\xi}{8R} = -\frac{3\xi}{8R}$

$\boxed{I_3 = -\frac{3\xi}{8R}}$, negativo → flui no sentido anti-horário na malha.

$I_2 = 2I_1 \rightarrow \boxed{I_2 = \frac{\xi}{4R}}$, positivo, fluxo real no sentido horário.

* Note que $I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\xi}{8R} + \frac{\xi}{4R} - \frac{3\xi}{8R} = \frac{\xi}{8R} + \frac{2\xi}{8R} - \frac{3\xi}{8R} = 0$, Conservação da carga.



⇒ As correntes que circulam/fluem no ramo do circuito entre os pontos $\overline{ad}$ e $\overline{cd}$ são

$I_{ab} = I_2 - I_3 = \frac{\xi}{4R} + \frac{\xi}{8R} = \frac{2\xi}{8R} + \frac{\xi}{8R} = \frac{3\xi}{8R}$, $\boxed{I_{ab} = \frac{3\xi}{8R}}$ Sentido $b \rightarrow a$

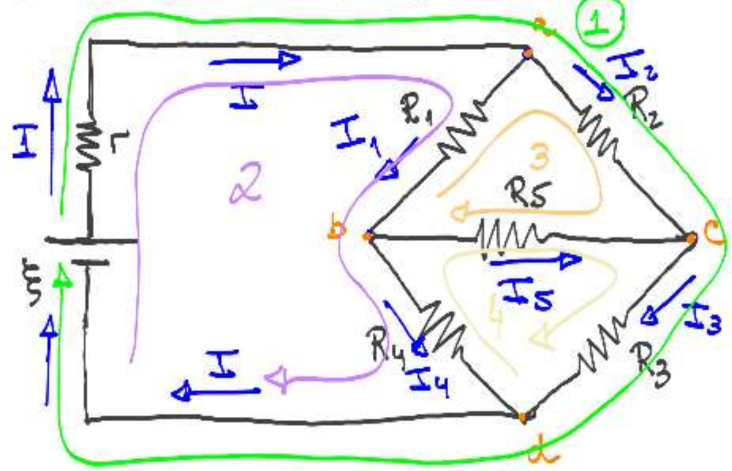
$I_{cd} = I_1 - I_2 = \frac{\xi}{8R} - \frac{\xi}{4R} = \frac{\xi}{8R} - \frac{2\xi}{8R} = -\frac{\xi}{8R}$, $\boxed{I_{cd} = \frac{\xi}{8R}}$, Sentido $c \rightarrow d$

A queda de potencial entre os terminais é dado por:

$V_{dc} = V_d - V_c = -RI_{cd} + \xi = -\frac{\xi R}{8R} + \frac{\xi 8}{8} = \frac{7\xi}{8}$, $\boxed{V_{dc} = \frac{7\xi}{8}}$, $V_{ba} = R.I_{ab} = R\frac{3\xi}{8R} = \frac{3\xi}{8}$

$\boxed{V_{ab} = \frac{3\xi}{8}}$ //

Exemplo: Vamos analisar um tipo de circuito chamado de "ponte", esse circuito pode ser utilizado em sensores de temperatura, medidores de resistências, etc. Vamos começar a discussão geral de como as correntes e quedas de potencial se dão ao cruzar o circuito.



* Este é um bom exemplo de circuito que não é passível de redução em associação em série/paralelo.

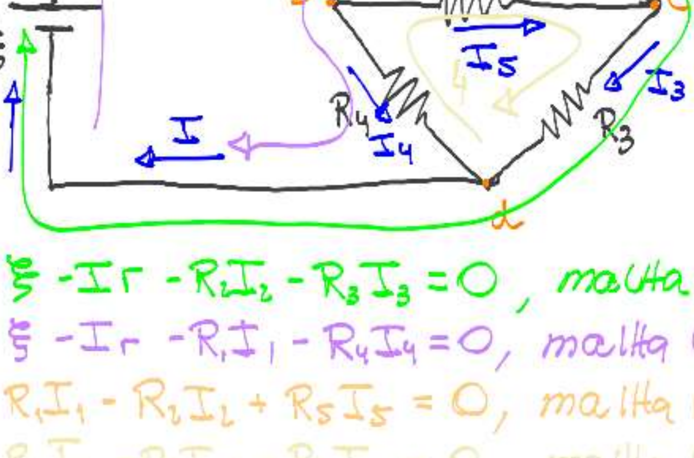
⇒ Por conservação da cargas, temos em cada nó, uma equação para as correntes

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$
$$I_1 = I_5 + I_4 \quad (2)$$
$$I_3 = I_2 + I_5 \quad (3)$$
$$I = I_4 + I_3 \quad (4)$$

* Lei dos Nós

$$\xi - Ir - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0, \quad \text{malha } (1)$$
$$\xi - Ir - R_1 I_1 - R_4 I_4 = 0, \quad \text{malha } (2)$$
$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_5 I_5 = 0, \quad \text{malha } (3)$$
$$R_4 I_4 - R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0, \quad \text{malha } (4)$$

⇒ Note que com esse conjunto de equações acima, podemos encontrar as correntes I_i e quedas de potencial V_i em cada elemento do circuito.



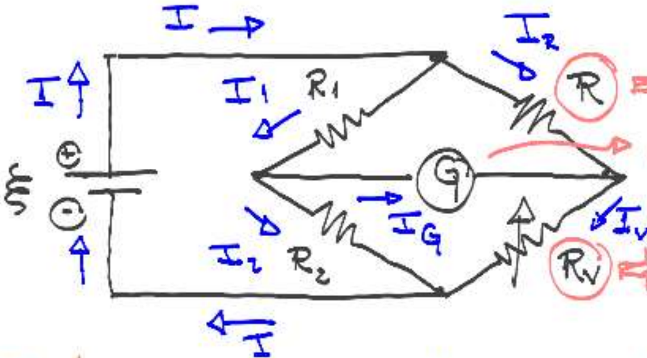
* Quatro novas incógnitas I_1, I_2, I_3, I_4

$$\xi - r(I_1+I_4) - R_2(I_2+I_4) - R_3(I_3+I_4) = 0, \quad (1)$$
$$\xi - r(I_1+I_4) - R_1(I_1-I_2) - R_4(I_1-I_3) = 0, \quad (2)$$
$$-R_1(I_2-I_1) - R_2(I_2+I_4) - R_5(I_2-I_3) = 0, \quad (3)$$
$$-R_4(I_3-I_1) - R_5(I_3-I_2) - R_3(I_3+I_4) = 0, \quad (4)$$

* Agora temos que resolver estas equações e encontrar I_1, I_2, I_3, I_4.

⇒ Bom, você pode observar que a solução do problema é "straighforward", ou seja, é fácil mas trabalhosa. Para tratar um problema um pouco mais simples, vamos discutir o seguinte circuito

Exemplo: Vamos analisar um circuito em forma de ponte utilizada para descobrir o valor da resistência (R) de um resistor desconhecido. Para isso precisamos de uma fonte d.c, um medidor de corrente (Galvanômetro), duas resistências conhecidas e um resistor de resistência variável (R_v). Montamos o seguinte circuito:



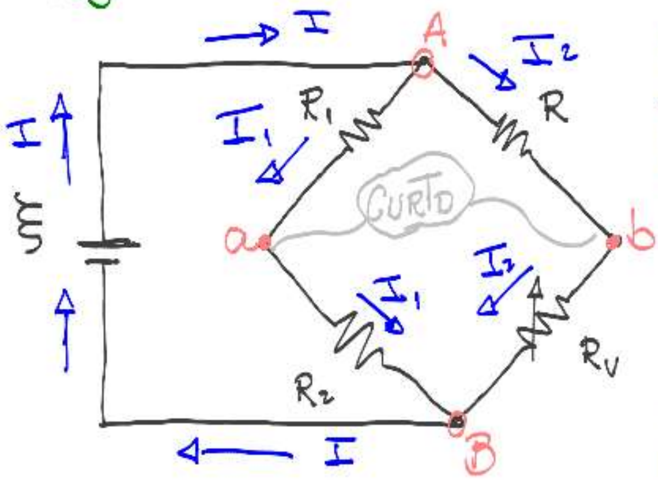
Ⓡ ⇒ Resistor de resistência desconhecida

Galvânometro ⇒ aparelho medidor de corrente elétrica.

R_V ⇒ Resistor de resistência variável

* Vou ignorar por hora o funcionamento do Galvanômetro, já que para isso precisamos entender outros fenômenos físicos, como momento de dipolo magnético e sua interação com o campo magnético $\vec{B}$. Voltaremos à essa discussão no futuro. A informação importante no momento é que esse equipamento é capaz de medir corrente elétrica, e com algumas modificações medir diferenças de potencial, ou seja, um Galvanômetro pode ser usado como amperímetro ou voltímetro. A montagem acima é conhecida como ponte de Wheatstone (Charles Wheatstone - 1802/1875), vejamos seu funcionamento.

⇒ Podemos ajustar o valor de R_V de maneira que o Galvanômetro marque corrente nula, neste caso não há corrente neste ramo do circuito, e isso ocorre porque todo ramo está sob o mesmo potencial eletrostático. Ou seja, o sistema equivalente é o seguinte:



▨ Não sabemos o valor de R, mas podemos controlar o valor de R_V até que $I_{ab} = 0$, ou seja, os pontos ⓐ e ⓑ estão sob o mesmo potencial e $V_{ab} = 0$. Assim fica fácil verificar que as quedas de potencial entre os pontos V_{Aa} e V_{Ab} são iguais, assim como V_{aB} e V_{bB}, temos:

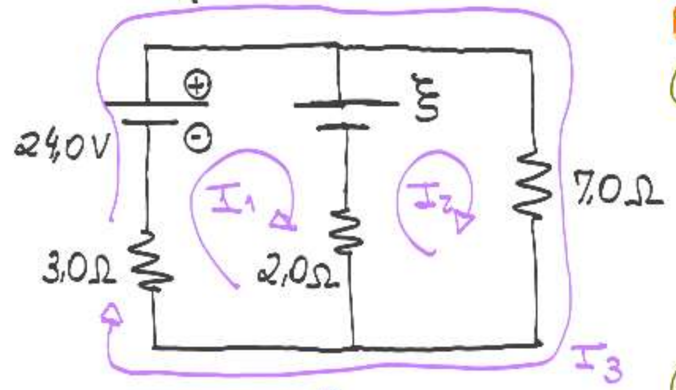
$$V_{Aa} = V_{Ab} = R_1 I_1 = R I_2 \quad (1)$$
$$V_{aB} = V_{bB} = R_2 I_1 = R_V I_2 \quad (2)$$

, Avaliando a razão $\frac{(1)}{(2)} = \frac{R_1 \cancel{I_1}}{R_2 \cancel{I_1}} = \frac{R \cancel{I_2}}{R_V \cancel{I_2}}$

⇒ Assim dizemos que quando a ponte de Wheatstone está em equilíbrio (pela escolha correta de R_V) a seguinte relação se verifica $\boxed{R_1 R_V = R_2 R}$, ou seja $\boxed{R = \frac{R_1 R_V}{R_2}}$

∴ Descobrimos experimentalmente o valor da resistência desconhecida.

Exemplo: Descubra quanto deve ser a ξ (f.e.m) da fonte d.c. do circuito abaixo para que a corrente elétrica que flui pela resistor de resistência 7,0 Ω seja de 1,80 Ampère, considere que as resistências internas das fontes são desprezíveis. pg96



Passos para resolução

① Vamos "chutar" - dar um "ansatz" de três correntes I_1, I_2 e I_3, escolhendo três malhas (caminho fechado, conservação de energia, campo conservativo).

② Escrevemos as equações p/ o campo conservativo $-\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$, ou seja, para todas as malhas a soma das d.d.p's em cada elemento deve ser nula.

③ Lembrando que nossa restrição seja que a corrente que flui pelo resistor de 7,0 Ω seja de 1,80 A. Assim temos:

$$24 - \xi - 2(I_1 - I_2) - 3(I_1 + I_3) = 0$$

$$\xi - 7(I_2 + I_3) - 2(I_2 - I_1) = 0$$

$$24 - 7(I_2 + I_3) - 3(I_1 + I_3) = 0$$

$$24 - 7(1{,}8) - 3(I_1 + I_3) = 0 \rightarrow \boxed{I_1 + I_3 = 3{,}8\text{ A}} \quad (2)$$

* Nossa restrição é que $\boxed{I_2 + I_3 = 1{,}8\text{ A}}$ // (1)

de (1) e (2) temos:

$$I_1 + \cancel{I_3} - I_2 - \cancel{I_3} = 3{,}8 - 1{,}8$$

$$\boxed{I_1 - I_2 = 2} \quad (3)$$

* Note que não precisamos efetivamente de três equações, já que há uma restrição $I_2 + I_3 = 1{,}80$ A "Equação" grátis

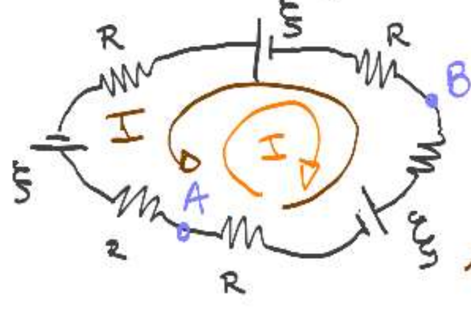
→ Ficamo com:

$$\xi - 7(I_2 + I_3) + 2(I_1 - I_2) = 0$$

$$\xi - 7(1{,}8) + 2 \times 2 = 0 \rightarrow \xi = 12{,}6\text{V} - 4 \rightarrow \boxed{\xi = 8{,}6\text{ Volts}}$$

\# Portanto, para que uma corrente de 1,8 Volts cruze o resistor de 7 Ohms uma fonte de força eletromotriz (f.e.m) $\xi = 8{,}6$V deve ser ligada ao circuito.

Exemplo: No circuito abaixo calcule o valor da queda de potencial entre os pontos A e B (V_{AB}). → Considere $R = 100\,\Omega$ e $\xi = 1{,}5$V.



$$-\xi - RI - RI - \xi - 2RI - \xi - RI = 0$$

$$3\xi + 5RI = 0$$

$$I = -\frac{3}{5}\frac{\xi}{R} = -\frac{3 \times 1{,}5}{5 \times 100} = -9\text{mA}, \quad \boxed{I = -9\text{mA}}$$

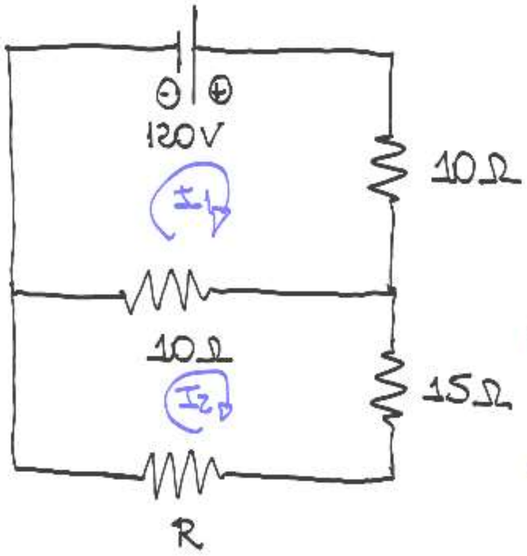
→ portanto flui na direção oposta à escolhida.

$$\text{Assim: } V_{AB} = -2RI + \xi = -2 \times 100 \times 9 \times 10^{-3} + 1{,}5 \rightarrow \boxed{V_{AB} = -0{,}3\text{V}}$$ //

exemplo: Escolha para o circuito abaixo um resistor com resistência (R) apropriado de maneira que a potência dissipada pelo resistor escolhido seja máxima.

o circuito elétrico d.c.

pg97



Lembre-se que a potência dissipada por um elemento resistivo, por efeito joule vale

$$\boxed{P = RI^2}$$

(1) Qual a corrente I_2 que flui por R?

Assim temos, pelo método das malhas

$$120V - 10I_1 - 10(I_1 - I_2) = 0$$
$$-10(I_2 - I_1) - 15I_2 - RI_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$-10I_2 + 10I_1 - 15I_2 - RI_2 = 0$$
$$-25I_2 + 5I_2 + 60 - RI_2 = 0$$
$$-(20+R)I_2 = -60$$

$$120 - 10I_1 - 10I_1 + 10I_2 = 0$$
$$-20I_1 = -10I_2 - 120$$
$$\boxed{I_1 = \frac{I_2}{2} + 6}$$

* A potência dissipada em (R) vale:

$$\boxed{I_2 = \frac{60}{20+R}}$$

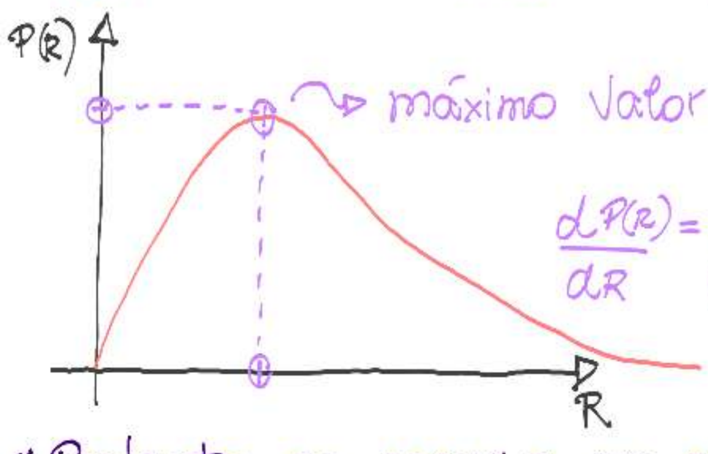
$$P(R) = RI_2^2 = R\frac{60^2}{(35+R)^2} = 60^2 R(35+R)^{-2}$$

* Vamos graficar essa potência em função de R, temos:

⇒ Rápida análise de P(R), $0 < R < \infty$

$\lim_{R\to 0} P(R) = 0$, $\lim_{R\to\infty} P(R) = \frac{60^2}{2(35+R)} = 0$, Quando R varia a potência sai de zero e volta a zero

→ REGRA de L'Hôpital



→ máximo valor quando $\frac{dP(R)}{dR} = 0$, temos então

$$\frac{dP(R)}{dR} = \frac{60^2}{(20+R)^2} + \frac{60^2 R(-2)}{(20+R)^3} = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{60^2}}{\cancel{(20+R)^2}} = \frac{\cancel{60^2} R \times 2}{(20+R)^{\cancel{3}}}$$

$$20 + R = 2R \rightarrow \boxed{R = 20\,\Omega}$$

* Portanto, ao escolher um resistor com resistência de 35Ω, o resistor dissipará a máxima potência possível neste circuito.