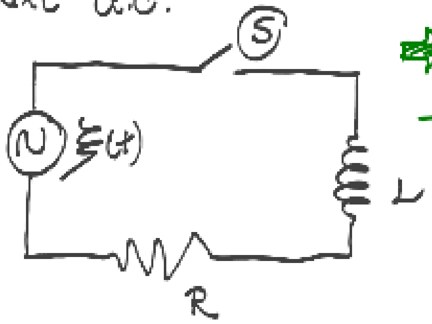
⇒ Antes de encarar com força total os circuitos RLC + fonte a.c. vamos tratar de um assunto que venho evitando até o momento, a resposta para a seguinte pergunta:

O que exatamente ocorre num circuito a.c. imediatamente após o fechamento da chave Ⓢ? (tempo transiente até o estado estacionário)

Para isso vamos usar como exemplo o seguinte circuito RL + fonte a.c.



⇒ Já discutimos este sistema no estado estacionário onde usamos o seguinte Ansatz: $I(t) = I_{pico}\cos(\omega t + \delta)$, e obtivemos:

$$I(t) = \frac{\xi_{pico}}{(R^2 + X_L^2)} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{-\omega L}{R}\right)\right)$$

* Mas essa é apenas parte da solução, lembre que a equação diferencial que governa o circuito é uma EDO não homogênia (oscilador forçado). Onde temos:

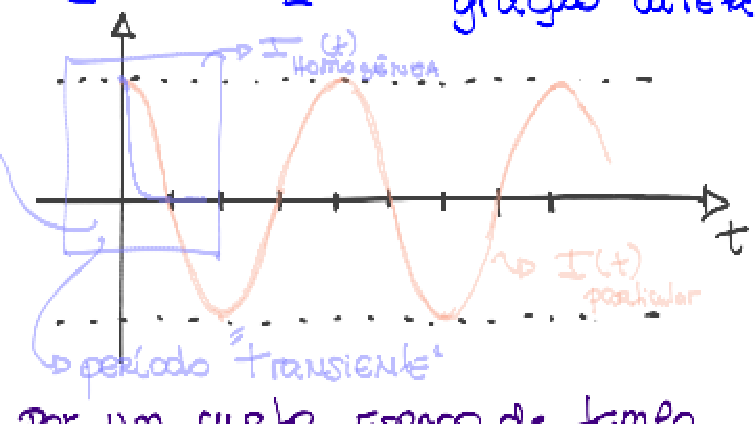
$$\xi(t) - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \leftrightarrow L\frac{dI}{dt} + RI = \xi(t) = \xi_{pico}\cos(\omega t)$$

* A solução completa é dada por uma combinação da solução da equação homogênea mais a particular:

$p\dot{x} + qx = f(t) \leftrightarrow x(t) = x_{Homog}(t) + x_{part}(t)$, em nosso caso a solução particular foi encontrada com o Ansatz, falta a solução da equação homogênea onde:

$L\frac{dI}{dt} + RI = 0 \leftrightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \leftrightarrow \frac{1}{I}dI = -\frac{R}{L}dt$, que por integração direta

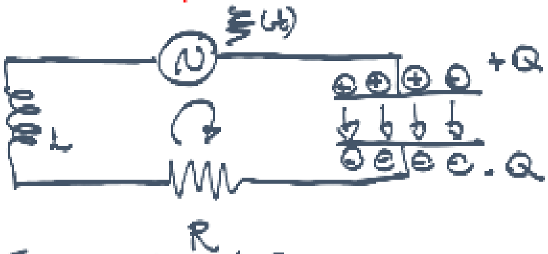
tem solução $\boxed{I_H(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t}}$



⇒ Decaimento exponencial onde fator $\frac{R}{L} = \frac{\text{resistência}}{\text{indutância}} \approx 10^{-6}, 10^{-9}$ s

A solução homogênea existe apenas por um curto espaço de tempo.

7.5 → Circuito RLC em série + fonte a.c (senoidal)



$\xi(t) = \xi_{pico} \cos(\omega t)$

ω = característica da fonte

Equação diferencial que governa a dinâmica do circuito:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = \xi(t) \leftrightarrow L\frac{d^2}{dt^2}Q(t) + R\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{Q(t)}{C} = \xi(t)$$

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}Q(t) + \frac{1}{LC}Q(t) = \frac{\xi(t)}{L} = f(t) \leftrightarrow \boxed{\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = f(t)}$$

A equação diferencial acima é a mesma de um sistema massa-mola forçado com amortecimento.

→ fonte (a.c de frequência ω)

→ força restauradora ($\propto 1/C$ no circuito a.c)

(Indutância/inércia)

→ fluido viscoso (resistência no circuito a.c)

Cuja equação $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = f(t)$, é bem conhecida e estudada.

$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \delta)$, solução particular

⇒ Vamos resolver o problema do circuito RLC utilizando o diagrama de fasores lembrando que: No circuito em série temos:

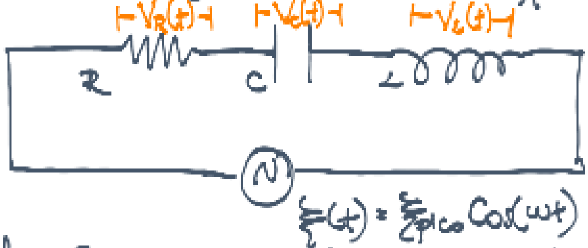
① A corrente $I(t)$ e a d.d.p na resistência $V_R(t)$ estão em coerência de fase.

② A d.d.p no indutor $V_L(t)$ está adiantada $\pi/2$ (90°) com relação à corrente no indutor.

③ A d.d.p no capacitor $V_C(t)$ está atrasada $\pi/2$ (90°) com relação à corrente no indutor.

④ A soma fasorial das d.d.p's é igual a tensão alternada fornecida pela fonte

⇨ Vamos aglutinar tudo que vimos nas aulas anteriores:



* Soma fasorial das quedas de potenciais

Solução geral da corrente para o estado estacionário

$$I(t) = I_{pico}\cos(\omega t + \delta) = \frac{\xi_{pico}}{Z}\cos(\omega t + \delta)\ ,\quad Z \equiv \text{Impedância (unidade } \Omega)$$

↳ É a mesma para todos os pontos dos circuitos.

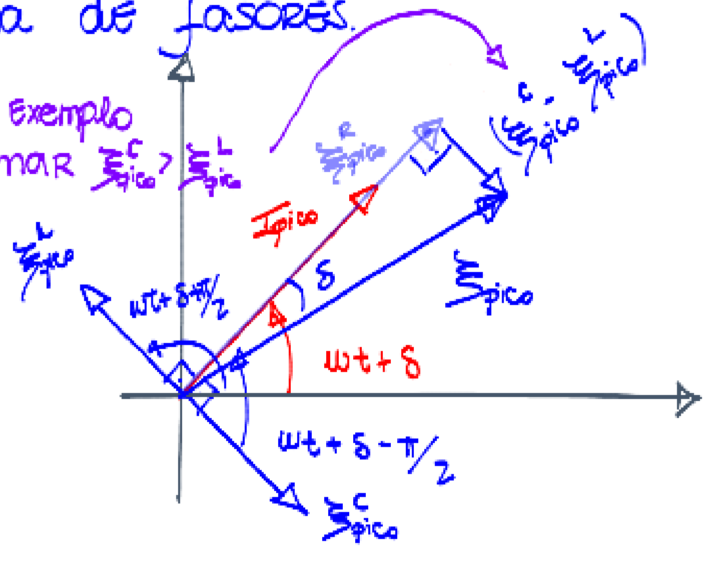
$$V_R(t) = RI(t) = RI_{pico}\cos(\omega t + \delta) = R\frac{\xi_{pico}}{Z}\cos(\omega t + \delta) = \xi^R_{pico}\cos(\omega t + \delta)$$

$$V_L(t) = X_L I_{pico}\cos(\omega t + \delta + \pi/2) = X_L\frac{\xi_{pico}}{Z}\cos(\omega t + \delta + \pi/2) = \xi^L_{pico}\cos(\omega t + \delta + \pi/2)$$

$$V_C(t) = X_C I_{pico}\cos(\omega t + \delta - \pi/2) = X_C\frac{\xi_{pico}}{Z}\cos(\omega t + \delta - \pi/2) = \xi^C_{pico}\cos(\omega t + \delta - \pi/2)$$

⇨ Quanto vale Z (impedância) e a fase δ? Analisemos no diagrama de fasores.

□ Como exemplo vou tomar $\xi^C_{pico} > \xi^L_{pico}$



* $I(t)$ é a mesma para todos os elementos (R, L e C)

$$I(t) = I_{pico}\cos(\omega t + \delta)$$

$$I(t) = \frac{\xi_{pico}}{Z}\cos(\omega t + \delta)$$

* Note que ξ^L_{pico} e ξ^C_{pico} são paralelos e sua soma resulta no sinal da fase δ!

Do diagrama acima temos que $(\xi_{pico})^2 = (\xi^R_{pico})^2 + (\xi^C_{pico} - \xi^L_{pico})^2$

Ficamos com:

$$(\cancel{I_{pico}}Z)^2 = (R\cancel{I_{pico}})^2 + (X_C\cancel{I_{pico}} - X_L\cancel{I_{pico}})^2$$

→ I_{pico} é o mesmo (corta-se sem choro nem vela)

$$Z^2 = R^2 + (X_C - X_L)^2 \longleftrightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$ ⇨ Impedância do circuito RLC em série.

$$Z(\omega)^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) \longleftrightarrow \boxed{Z = \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega_0^2 - \omega)^2}}$$

ou ainda de forma equivalente, vamos escrever a impedância como:

$$Z(\omega) = \left[R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2\right]^{1/2}$$

Como: $I_{pico} = \frac{\mathcal{E}_{pico}}{Z(\omega)} \leftrightarrow I_{pico}(\omega)$, a própria intensidade da corrente é modulada pela frequência ω da fonte.

⇨ Voltando ao diagrama de fasores da página anterior temos também a seguinte relação do "triangulo" das d.d.p's.

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{CO}{CA} = \frac{X_C - X_L}{R} \leftrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\delta = \frac{X_C - X_L}{R}} \text{ ou } \boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right) = \delta}$$

$$\frac{X_C - X_L}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) = \frac{1}{R}\frac{L}{\omega}\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = \frac{L}{\omega R}(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Portanto:

$$\boxed{\operatorname{tg}\delta = \frac{L}{\omega R}(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{ ou } \boxed{\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{\omega R}(\omega_0^2 - \omega^2)\right)}$$

⇨ Lembre-se que:

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ = frequência natural de oscilação

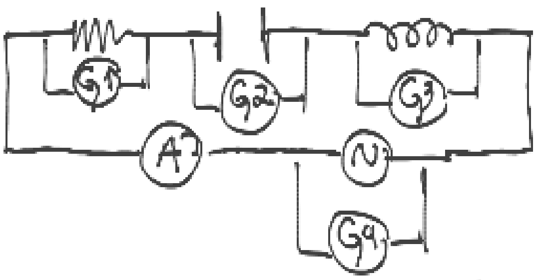
ω = frequencia da fonte.

Assim, a solução particular $\psi_{part}(t)$ para a corrente neste circuito pode ser escrita de forma completa como:

$$I(t) = I_{pico}\cos(\omega t + \delta)$$

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_{pico}}{\left[R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2\right]^{1/2}}\cos\left[\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{\omega R}(\omega_0^2 - \omega^2)\right)\right]}$$

* Qual a d.d.p medida em cada elemento do circuito? Lembrando que um multimetro/Galvanômetro medirá os valores efetivos.



* Os galvanômetros G1, G2, G3 e G4 são ligados em paralelo c/ os elementos R, L, C e fonte a.c

* O Amperímetro é ligado em série com o circuito.

Nestas condições os valores efetivos medidos são:

$$I_{pico} = \frac{\mathcal{E}_{pico}}{Z} \longleftrightarrow \frac{I_{pico}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}_{pico}}{\sqrt{2}}\frac{1}{Z} \longleftrightarrow \boxed{I_{rms} = \frac{\mathcal{E}_{rms}}{Z}}$$

→ $I_{rms}(\omega)$
→ Varia com ω frequência da fonte.

Nos galvanômetros serão medidos:

$$\mathcal{E}^R_{pico} = R I_{pico} = R\frac{\mathcal{E}_{pico}}{Z} \longleftrightarrow \frac{\mathcal{E}^R_{pico}}{\sqrt{2}} = \frac{R}{Z}\frac{\mathcal{E}_{pico}}{\sqrt{2}} \longleftrightarrow \boxed{\mathcal{E}^R_{rms} = \frac{R}{Z(\omega)}\mathcal{E}_{rms}}$$

$$\mathcal{E}^L_{pico} = X_L I_{pico} = \frac{X_L}{Z}\mathcal{E}_{pico} \longleftrightarrow \frac{\mathcal{E}^L_{pico}}{\sqrt{2}} = \frac{X_L}{Z(\omega)}\frac{\mathcal{E}_{pico}}{\sqrt{2}} \longleftrightarrow \boxed{\mathcal{E}^L_{rms} = \frac{X_L}{Z}\mathcal{E}_{rms}}$$

da mesma forma:

$$\boxed{\mathcal{E}^C_{rms} = \frac{X_C}{Z}\mathcal{E}_{rms}}$$

então:

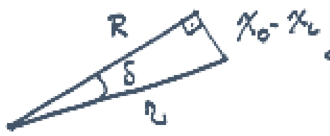
$$\boxed{\mathcal{E}^2_{rms} = \mathcal{E}^{R\,2}_{rms} + \left(\mathcal{E}^C_{rms} - \mathcal{E}^L_{rms}\right)^2}$$

7.5.1 → Potência dissipada pelo circuito RLC + fonte a.c.

⇒ Sabemos que apenas a resistência (R) dissipa energia no circuito, assim toda energia/potência fornecida pela fonte é dissipada nos elementos resistivos representados por R (não tem choro nem vela).

Potencia média dissipada $P_{média} = \langle P(t)\rangle = \langle R\,I^2(t)\rangle = R\frac{I^2_{pico}}{2} = R\,I^2_{rms}$

$$\langle P(t)\rangle = R\frac{\mathcal{E}^2_{rms}}{Z^2}$$



$$\longleftrightarrow \cos\delta = \frac{R}{Z}$$

$$\langle P(t)\rangle = \frac{R}{Z}\frac{\mathcal{E}^2_{rms}}{Z} = \cos(\delta)\frac{\mathcal{E}_{rms}}{Z}\cdot\mathcal{E}_{rms} = \mathcal{E}_{rms} I_{rms}\cos\delta$$

há uma dependência fundamental com ω ⟷ $\boxed{P_{méd}(\omega) = \mathcal{E}_{rms} I_{rms}(\omega)\cos[\delta(\omega)]}$

⇒ Para o caso de ω fixo, ou seja, $\omega = cte$ temos:

$P_{méd} = \mathcal{E}_{rms} I_{rms}\cos(\delta)$, onde $\cos\delta \equiv$ chamado de fator de potência. Lembrando que δ é a fase:

onde $\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{R\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)\right) \rightarrow$ p/ $\omega = cte$, depende de R, L e C.

Assim a potência é máxima se $\cos\delta = 1$ ou $\boxed{\delta = 0}$

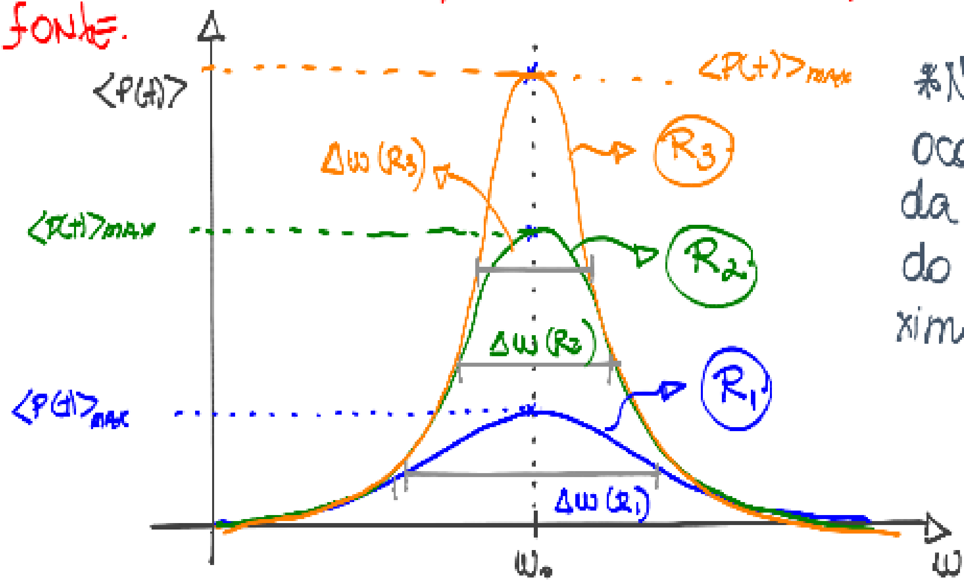
$\delta = 0$ se $\arctg\left(\frac{1}{\omega R}(\omega_0^2 - \omega^2)\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = \omega_0} \Leftrightarrow \boxed{LC = \frac{1}{\omega^2}}$

⇒ No caso mais geral a potência média dissipada vale:

$$\langle P(t)\rangle = P_{méd}(\omega) = R I_{rms}^2 = \frac{R}{Z^2}\mathcal{E}_{rms}^2 = \frac{R\,\mathcal{E}_{rms}^2}{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

$$\boxed{P_{méd}(t) = R\,\mathcal{E}_{rms}^2 \frac{1}{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2-\omega_0^2)^2}} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}\langle P(t)\rangle &= 0\\ \lim_{\omega\to\infty}\langle P(t)\rangle &= 0\end{aligned}\right\}$$ Há portanto um máximo entre os limites.

Análise gráfica da potência média dissipada em função da frequência da fonte.



*Note que a máxima potência ocorre para $\omega = \omega_0$, chamada frequência de ressonância do circuito. Neste o valor máximo $\langle P(t)\rangle_{máx}$ é:

$$\langle P(t)\rangle_{max} = \frac{R\,\mathcal{E}_{rms}^2}{R^2} = \frac{\mathcal{E}_{rms}^2}{R}$$

No gráfico acima fica claro a relação:

$$P_{méd}^{máx}(R_3) > P_{méd}^{máx}(R_1) > P_{méd}^{máx}(R_1) \quad \text{onde} \quad R_1 > R_2 > R_3$$

Chamemos o alargamento em frequência do pico $\Delta\omega$ como largura de ressonância a meia altura do pico. Note que quanto menor a carga resistiva R mais fino/estreito e alto é o pico, ou seja $\Delta\omega$ é menor. Se $\Delta\omega$ é menor há menos espalhamento de frequências com as quais o circuito é ressonante. Se R é muito pequeno $\Delta\omega$ também é pequeno, e o circuito só é eficiente em torno de ω_0.

A relação entre $\Delta\omega$ e ω_0 é chamado de Fator de Qualidade Q definido como: $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$