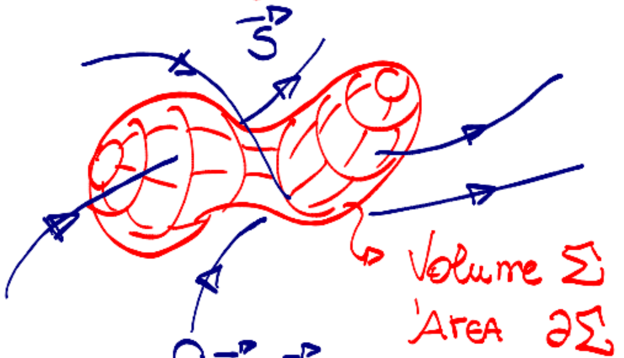
Conservação de energia



$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0}$$

Potência no volume Σ

$$U = \int u \, d\sigma$$

$$\frac{dU}{dt} = P = \int \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma = -\int_\Sigma \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\, d\sigma$$

$$\frac{dU}{dt} = -\int_\Sigma (\vec{\nabla}\cdot\vec{S})\, d\sigma$$

↳ Teorema de Gauss

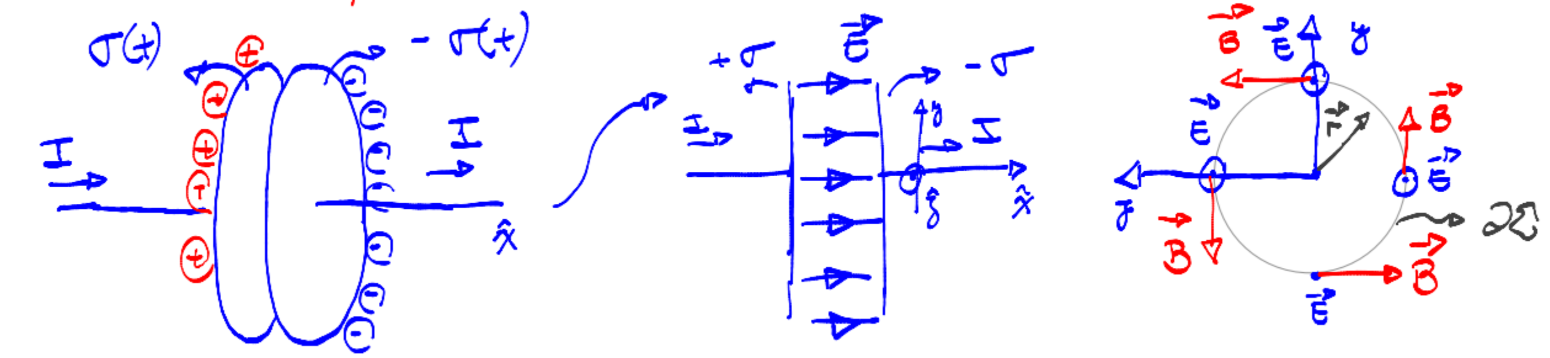
$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\oint_{\partial\Sigma} \vec{S}\cdot d\vec{a}}$$

→ Em geral se $\vec{S}$ entra em $\partial\Sigma$ $\vec{S}\cdot d\vec{a} < 0$, $P > 0$
se $\vec{S}$ sai em $\partial\Sigma$ $\vec{S}\cdot d\vec{a} > 0$, $P < 0$
(energia no volume Σ aumenta ou diminui)

Exemplo: Processo de carregamento de um capacitor de placas circulares.

a) Qual o vetor de Poynting $\vec{S}$ entre as placas.

b) Qual a potência de energia armazenada.



O vetor de Poynting associado ao campo é dado por:

$\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$, $\vec{E} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$, $\vec{S} \neq \vec{0}$ mesmo não havendo propagação de onda EM.

Quando vale $\vec{B}$, $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\hat{x}}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \hat{\varphi}}$$

$$\int_\Sigma (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{a} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = B\, 2\cancel{\pi}\cancel{r}$$

$$\vec S = \frac{\vec E \times \vec B}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat x \times \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{\mu_0 2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat y \quad , \quad \vec E = E(t)\hat x$$

$$\vec S = E\hat x \times \frac{\varepsilon_0 r}{2}\frac{\partial E}{\partial t}\hat y = \frac{\varepsilon_0 r}{2} E \frac{\partial E}{\partial t}(-\hat r) = -\varepsilon_0 r \frac{\partial E^2}{\partial t}\hat r$$

$$\boxed{\vec S = -\varepsilon_0 r \frac{\partial E^2}{\partial t}\hat r}$$

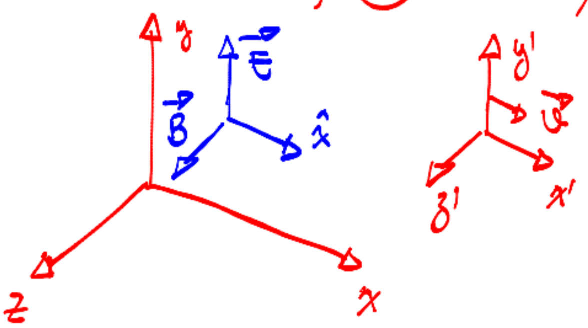
10.12 ↦ Observação da onda eletromagnética em outro referencial inercial (Relatividade da onda EM)

↦ Relações de transformações para um boost na direção de x positivo.

$$E_x' = E_x \quad \Big| \quad E_y' = \gamma(E_y - \beta c B_z) \quad \Big| \quad cB_y' = \gamma(cB_y + \beta E_z)$$

$$B_x' = B_x \quad \Big| \quad cB_z' = \gamma(cB_z - \beta E_y) \quad \Big| \quad E_z' = \gamma(E_z + \beta c B_y)$$

Onda EM no ref (F), ref (F') se move com velocidade $\vec v$ na direção positiva de x com relação ao referencial (F).



Em (F) $\boxed{\begin{matrix}\vec E \times \vec B \neq 0 \\ \vec E \cdot \vec B = 0\end{matrix}}$ Campos são ortogonais.

No referencial (F') temos $\vec E' \cdot \vec B' = E_x' B_x' + E_y' B_y' + E_z' B_z'$

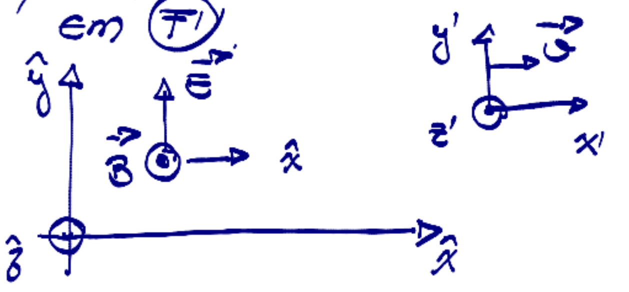
$$\vec E' \cdot \vec B' = E_x B_x + \gamma^2 (E_y - \beta c B_z)\left(B_y + \frac{\beta E_z}{c}\right) + \gamma^2 (E_z + \beta c B_y)\left(B_z - \frac{\beta E_y}{c}\right)$$

$$= E_x B_x + \gamma^2\left[E_y B_y + \frac{\beta}{c} E_y E_z - \beta c B_z B_y - \beta^2 E_z B_z\right] + \gamma^2\left[E_z B_z - \frac{\beta}{c} E_y E_z + \beta c B_z B_y - \beta^2 E_y B_y\right] = E_x B_x + \gamma^2 B_y E_y (1-\beta^2) + \gamma^2 E_z B_z (1-\beta^2)$$

$\vec E' \cdot \vec B' = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = \vec E \cdot \vec B = 0$, Campos são ortogonais em (F')

$\vec E \cdot \vec B \equiv$ Invariante relativístico

Em (F) temos →



Resumo da onda EM

$E_y \neq 0$, $E_x = E_z = 0$

$B_y = B_x = 0$, $B_z \neq 0$

$E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z)$, $E_y = E_0$

$B'_z = \gamma\left(B_z - \dfrac{E_y}{c}\right)$, $B_z = \dfrac{E_0}{c}$

$$E'_y = \gamma\left(E_0 - \beta c \frac{E_0}{c}\right) = \gamma E_0 (1-\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_0 (1-\beta)$$

$$B'_z = \gamma\left(\frac{E_0}{c} - \beta\frac{E_0}{c}\right) = \gamma \frac{E_0}{c}(1-\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_0 (1-\beta)$$

$$\boxed{E'_y = E_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \,//, \quad \boxed{B'_z = E_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \,//$$

Para um F' que viaja à c, $\beta \rightarrow 1$, $\boxed{E'_y = 0 = B'_z = 0}$

não há onda em F'.

↦ Podemos interpretar esse sumiço da onda em F' como a não existência do referencial de repouso da onda EM ou equivalentemente do próprio fóton.

10.13 ↦ Intensidade da radiação eletromagnética

$\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ ↦ $\dfrac{\text{Potência}}{\text{área}}$, Taxa instantânea de fluxo de energia por unidade de área

$$|\vec{S}| = S = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}||\vec{B}|\cancel{\operatorname{Sen}\theta} \quad \measuredangle\,(\theta = \pi/2) \quad = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{E}{\mu_0}\frac{E}{c} = \frac{E^2}{\mu_0 c}$$

$$S = \frac{E^2}{\mu_0 c}, \quad \langle S\rangle = \left\langle \frac{E^2}{\mu_0 c}\right\rangle = I, \quad I = \frac{1}{\mu_0 c}\langle E^2\rangle = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{1}{2}E^2$$

$$I = \frac{\langle E^2\rangle}{\mu_0 c} \equiv \text{Intensidade}\left[\frac{W}{m^2}\right], \quad I = \frac{1}{\mu_0 c}\frac{E^2}{2} \mapsto \boxed{I = \frac{E_{rms}^2}{\mu_0 c}} \,//$$

*

$$\vec{E}(x,t) = \mathrm{Im}\{\vec{E}^*(\vec{r},t)\} = \vec{E}_0 \operatorname{Sen}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \quad E^2 = E_0^2 \operatorname{Sen}^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

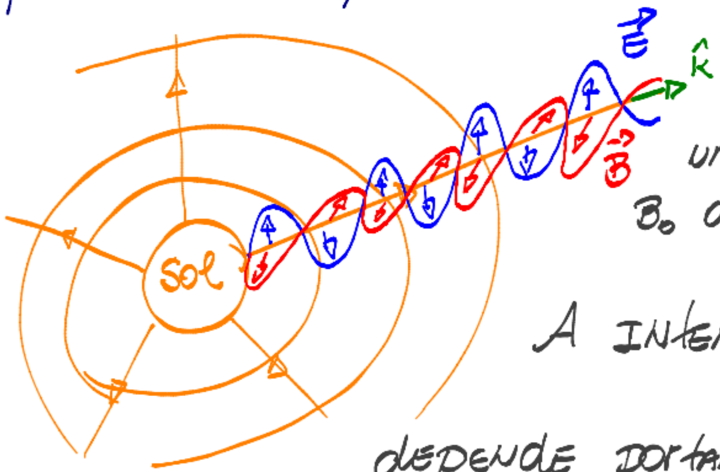
$$\langle E^2\rangle = E_0^2 \frac{1}{\theta_{\text{período}}}\int_0^{\text{período}} \operatorname{Sen}^2\theta \, d\theta = \frac{E_0^2}{2}, \quad E_{rms} = \sqrt{\langle E^2\rangle}$$

E_{rms} ≡ Amplitude Quadrática Média da onda eletromagnética.

⇒ Exemplo: Radiação emitida pelo Sol.

* Qual os valores das Amplitudes (rms) do campo elétrico e magnético que atingem a superfície da terra?

↦ O Sol é um corpo celest que emite radiação eletromagnética, além de partículas carregadas de altas energia. A luz é emitida na forma de uma onda esférica não polarizada, a fonte dessa energia são reações de fusão nuclear $H + H \mapsto He$ que produzem um potência de $3{,}9\times10^{26}\,W$ em média.



Essa radiação atinge a terra como uma onda plana de amplitudes E_0 e B_0 ou ainda seus valores (rms) E_{rms}, B_{rms}.

A intensidade é $I = \dfrac{P}{\text{Área}} = \dfrac{3{,}9\times10^{26}\,W}{4\pi r^2}$, e depende portanto do inverso do quadrado do raio.

Essa radiação na terra temos:

$r_0 =$ 8 minutos luz

$r_0 = 8\times60\times3\times10^{8}\,m.$

$$\boxed{r_0 = 1{,}4\times10^{11}\,m}$$

$$I = \frac{3{,}9\times10^{26}\,W}{4\pi\,(1{,}4\times10^{11}\,m)^2} = 1{,}6\times10^{3}\,\frac{W}{m^2}, \quad I = \frac{E_{rms}^2}{\mu_0 c} \quad \boxed{E_{rms} = \sqrt{I\mu_0 c}}$$

$$E_{rms} = \left[1{,}6\times10^{3}\,\frac{W}{m^2}\;1{,}257\times10^{-6}\,\frac{H}{m}\;3\times10^{8}\,\frac{m}{s}\right]^{1/2} = 776{,}76\,V.m^{-1}$$

$$\boxed{E_{rms} \simeq 776{,}76\,\frac{V}{m}}, \quad B_{rms} = \frac{E_{rms}}{c} \mapsto \boxed{B_{rms} = 2{,}59\times10^{-6}\,T}$$

$$\mu_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{E^2\mu_0\varepsilon}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \mu_e$$

* Cuidado ao comparar os campos, já que no SI apresentam unidade distintas.

10.14 → Pressão de Radiação (clássica)

→ O quadrimomento da onda/fóton eletromagnética

$$p^{\mu} \equiv (p^0, p^i) = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$E \equiv$ energia relativística, $\vec{p} \equiv$ momento relativístico

$$p^{\mu}p_{\mu} = p^{\mu}\eta_{\mu\beta}p^{\beta} = -m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \rightarrow \boxed{p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}$$

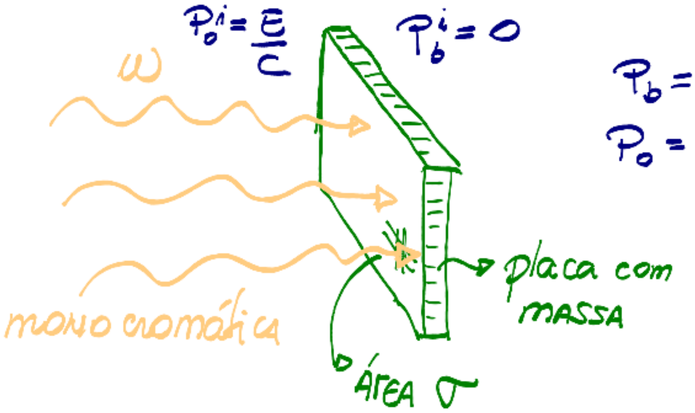
* Ocorre que já discutimos o referencial de repouso da onda EM, ou a sua inexistência. Assim não há relacionado à onda/fóton massa/massa de repouso já que não há ref. de repouso.

$\boxed{m=0}$, $p = \dfrac{E}{c}$, há contudo momento linear associado

$\Delta p = \dfrac{\Delta E}{c}$, essa troca/variação de momento é acompanhada por uma troca/variação de energia.

→ Vamos analisar 2 casos limites

▪ Absorção total da radiação



P_b = momento linear da placa
P_0 = momento da onda

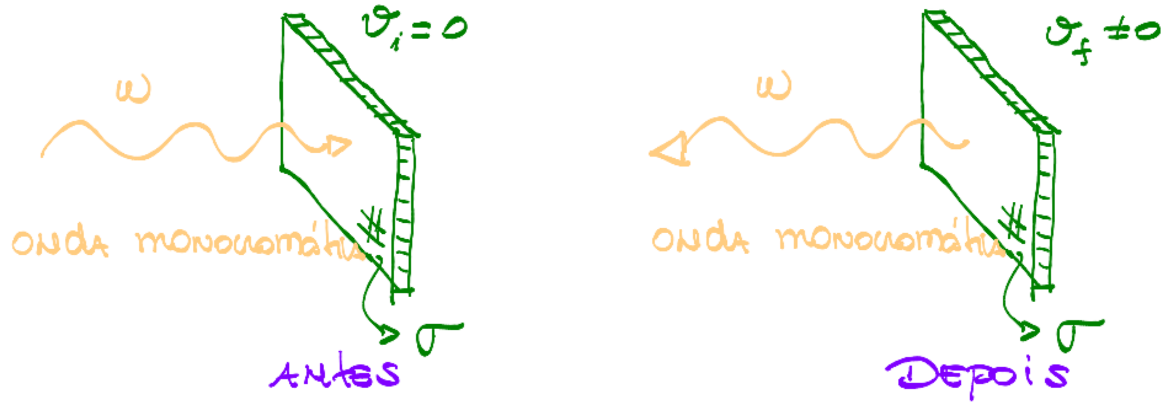
Se o fóton é totalmente absorvido, por conservação de momento, o momento final da placa é a do fóton.

$$\Delta P_b = \Delta P_0 = \frac{\Delta E}{c}, \quad \Delta E = IA\Delta t, \quad f = \frac{\Delta P_b}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{IA\Delta t}{\Delta t}$$

$\boxed{f = \dfrac{IA}{c}}$ força de radiação clássica para um corpo que absorve toda radiação (limite mínimo)

$$P = \frac{f}{A} = \frac{IA}{cA} = \frac{I}{c} \left[\frac{N}{m^2}\right]$$, Pressão de radiação.

→ Reflexão total da radiação



$$\Delta P_b = 2\Delta P_o = 2\frac{\Delta E}{c} \to \boxed{f = 2\frac{IA}{c}} \;,\; \boxed{P = 2\frac{I}{c}}$$

Assim temos que no caso limite:

força de radiação $\quad \frac{IA}{c} < f < 2\frac{IA}{c}$

Pressão de radiação $\quad \frac{I}{c} < P < 2\frac{I}{c}$