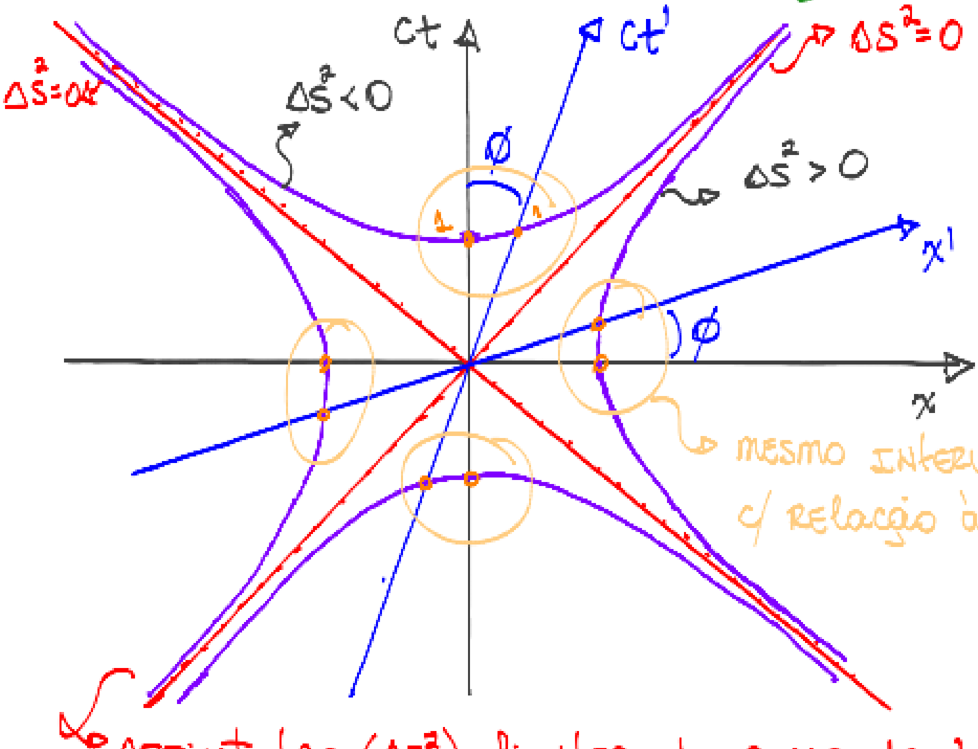
Assim o lugar geométrico que preserva intervalos pode ser parametrizado por um ângulo hiperbólico θ, no diagrama bidimensional de Minkowski é de fácil verificação.

$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 \longleftrightarrow$ no plano cartesiano $\Delta s^2 = x^2 - y^2$ é a equação de uma curva hiperbólica, portanto, equivalentemente temos:

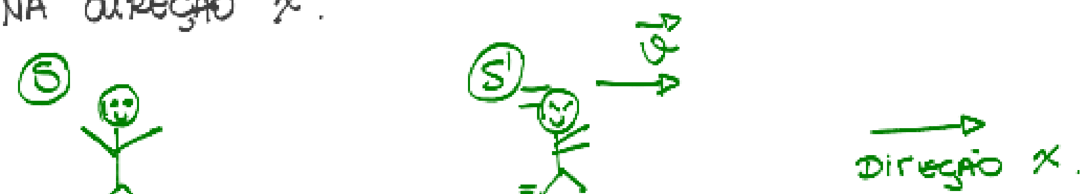
* Função Hiperbólica 2D $\Rightarrow x^2 - (ct)^2 = \Delta s^2$, lugar geométrico de mesmo intervalo (distância à origem).



$\Rightarrow$ As hipérboles fazem o papel das circunferências no espaço euclidiano. Parametrizadas agora por um ângulo hiperbólico $-\infty < \theta < \infty$

$\Rightarrow$ Veremos que esse parâmetro está relacionado à velocidade relativa entre referenciais ou observadores e é chamado de "*Rapidity*".

Analisaremos agora as alterações necessárias às transformações clássicas de Galileu de forma a acomodar os postulados de Einstein. Sem perda de generalidade comecemos utilizando um movimento relativo unidimensional na direção x. Onde um ref. inercial (S) está em repouso e outro (S') se move p/ direita com velocidade $\vec{v}$. Por questão de formalismo chamaremos este exemplo de "boost" na direção x.



Observador parado   Observador c/ velocidade v

Lembre-se que uma rotação φ do ref. não altera as distâncias no espaço euclidiano:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = R^2$$

A mesma idéia pode ser introduzida no espaçotempo de Minkowski onde rotações por um ângulo hiperbólico θ são:

$$\begin{aligned} ct' &= ct\cosh\theta - x\,\mathrm{senh}\,\theta \\ x' &= -ct\,\mathrm{senh}\,\theta + x\cosh\theta \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

} Estou considerando um movimento relativo "boost" apenas na direção x.

$\Rightarrow$ Primeiro vamos verificar que essa transformação de fato preserva o intervalo Δs^2:

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= -(ct\cosh\theta - x\,\mathrm{senh}\,\theta)^2 + (-ct\,\mathrm{senh}\,\theta + x\cosh\theta)^2 + y^2 + z^2 \\ &= -(c^2t^2\cosh^2\theta - \cancel{2ctx\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta} + x^2\mathrm{sen}^2\theta) + (c^2t^2\mathrm{senh}^2\theta - \cancel{2ctx\cosh\theta\,\mathrm{senh}\,\theta} + \\ &\quad x^2\cosh^2\theta) + y^2 + z^2 \\ &= -c^2t^2(\cosh^2\theta - \mathrm{senh}^2\theta) + x^2(\cosh^2\theta - \mathrm{senh}^2\theta) + y^2 + z^2 \\ &= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \Delta s^2 \end{aligned}$$

, portanto, preservando a norma $\boxed{\Delta s^2 = \Delta s'^2}$.

※ No referencial S' o observador está parado em sua origem, então podemos reescrever:

$x' = -ct\,\mathrm{senh}\,\theta + x\cosh\theta$, onde $x' = 0$ p/ S'

$ct\,\mathrm{senh}\,\theta = x\cosh\theta$

$$\frac{\mathrm{senh}\,\theta}{\cosh\theta} = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \mathrm{tgh}\,\theta = \frac{v}{c} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{tgh}\,\theta = \frac{v}{c}}, \quad \theta = \mathrm{arctgh}\left(\frac{v}{c}\right)$$

$\rightarrow$ Rapidity.

$\Rightarrow$ Você pode ainda verificar que $\theta \in (-\infty, \infty)$

8.6 $\Rightarrow$ Transformações de Lorentz ("Lorentz Boosts")

Pelo caminho geométrico que seguimos até o momento fica relativamente simples de encontrar as relações de transformações que levam as coordenadas de S à S' ou vice-versa.

① $$\tanh\theta = \frac{\mathrm{senh}\,\theta}{\cosh\theta} = \frac{v}{c} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{senh}\,\theta = \frac{v}{c}\cosh\theta}$$

② $$\cosh^2\theta - \mathrm{senh}^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cosh^2\theta - \frac{v^2}{c^2}\cosh^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cosh^2\theta - \beta^2\cosh^2\theta = 1$$

$$\cosh^2\theta = \frac{1}{1-\beta^2} \Leftrightarrow \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \quad (\text{Fator de Lorentz}, \gamma \geq 1)$$

Assim temos:

$$x' = -ct\,\operatorname{senh}\theta + x\cosh\theta$$
$$x' = -ct\,\frac{v}{c}\cosh\theta + x\cosh\theta$$

$$x' = \cosh\theta\,(x - vt) = \cosh\theta\left(x - \frac{v}{c}ct\right) = \cosh\theta\,(x - \beta ct)$$

$$\boxed{x' = \gamma(x - \beta ct)} \longleftrightarrow \boxed{x' = \gamma(-\beta ct + x)}$$

$$x' = -\gamma\beta ct + \gamma x$$

$$ct' = ct\cosh\theta - x\,\operatorname{senh}\theta$$
$$ct' = ct\cosh\theta - x\frac{v}{c}\cosh\theta = \cosh\theta\,(ct - \beta x)$$

$$\boxed{ct' = \gamma(ct - \beta x)} \rightsquigarrow ct' = \gamma ct - \gamma\beta x$$

$$\boxed{y' = y} \quad e \quad \boxed{z' = z}$$

* O "Boost" na direção x não altera as coordenadas transversais.

Assim temos:

O observador em S mede (ct, x, y, z) $\xrightarrow{\text{transformações de Lorentz}}$ O observador em S' mede (ct', x', y', z')

"Boost em x"

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(-\beta ct + x)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Mas do ponto de vista de S' é o Ref. S que se move para esquerda c/ vel. v

"Boost em x)

$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$
$$x = \gamma(\beta ct + x)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

Uma maneira mais interessante de representar essas coordenadas no espaçotempo é utilizar o formalismo dos quadrivetores onde:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) \quad \text{ou seja} \quad \mu = 0,1,2,3 \quad e \quad i = 1,2,3$$

Em nosso caso temos

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z)$$
$$x'^{\mu} = (ct', x', y', z')$$

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \equiv$ matriz de transformação de Lorentz (Boost em x)

Podemos reescrever a transformação:

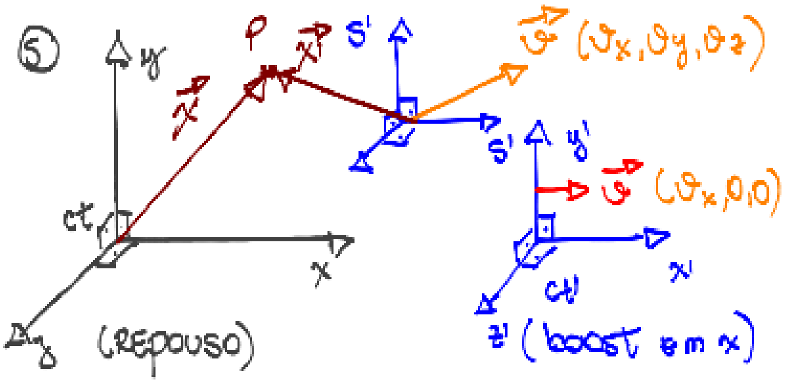
$$x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1$$
$$x'^1 = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1$$
$$x'^2 = x^2$$
$$x'^3 = x^3$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}}$$

8.6.1 ⟶ Transformações de Lorentz para um "Boost" em qualquer direção.

Consideremos agora um caso geral onde o movimento relativo entre os referenciais ocorre em qualquer direção. Já sabemos que apenas as coordenadas na direção do boost (espaço + tempo) se misturam, e nada ocorre com as coordenadas espaciais na direção transversal ao boost.



* Vamos resolver o problema da seguinte forma: Vamos estudar o boost na direção paralela à $\vec{v}$, e descobrir como as coordenadas nessa direção se transformam

Vamos decompor $\vec{x}$ na direção paralela $\vec{x}_{\parallel}$ e ortogonal $\vec{x}_{\perp}$ ao boost em $\vec{v}$. Assim temos:

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}, \quad \text{onde} \quad \boxed{\vec{x}_{\parallel} = x_{\parallel}\frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}\,\vec{v}}{v^2}}, \quad \boxed{\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}\,\vec{v}}{v^2}}$$

⇒ transformações das componentes paralelas à $\vec{v}$

$x' = \gamma(-\beta ct + x)$, $ct' = \gamma(ct - \beta x)$, $y' = y$, $z' = z$

Então

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(-\vec{\beta}ct + \vec{x}_{\parallel}) \longleftrightarrow \vec{x}'_{\parallel} = \gamma\left(-\vec{\beta}ct + \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}\,\vec{v}}{v^2}\right)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \longleftrightarrow ct' = \gamma\left(ct - \beta\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{v}\right)$$

$\boxed{\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}}$, componentes ortogonais não se alteram.

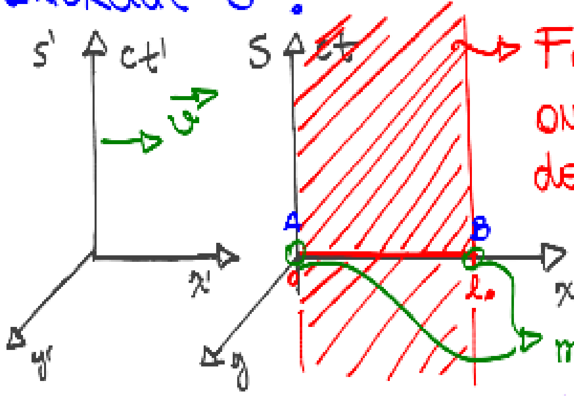
onde $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$, e $\gamma = \dfrac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}$ (fator de Lorentz)

8.7 ⟶ Efeitos cinemáticos das transformações de Lorentz

Note que coordenadas transversais aos boosts não se alteram, assim distâncias ou comprimentos de algo são medidas iguais em ambos os referenciais quando são medidas transversais.

Lembrando que medidas de comprimento são sempre simultâneas num determinado referencial (devem ocorrer ao mesmo tempo!). Mas comprimentos / distâncias na direção do boost é uma estória completamente diferente. Veja:

Consideremos uma barra unidimensional de comprimento l_0 medida em um referencial S em que a barra está em repouso na direção x. Se um observador se move para direita com velocidade de v, qual será o comprimento da barra em seu referencial inercial S'?

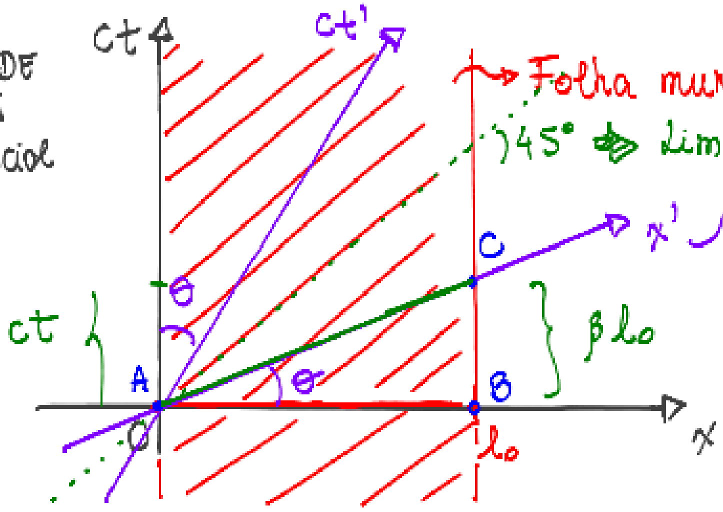


Folha mundo onde vive a barra de comprimento l_0

medida Simultânea

* O referencial quando passar pela Barra medirá simultaneamente os pontos A e B e medirá uma certa distância l' em seu referencial. Vejamos:

DIAGRAMA DE MINKOWSKI DO REFERENCIAL S



Folha mundo da Barra.

45° ⟹ limite do cone de luz

Referencial S' observado por S Boost na direção x.

Lembremos que $tg\theta = \frac{v}{c} = \beta = \frac{CO}{CA}$ (triangulo ABC) $= \beta = \frac{ct}{l_0} \Leftrightarrow \boxed{ct = \beta l_0}$

Lembremos também que intervalos ΔS^2 são preservados entre transformações de referenciais. Então a 'distância' entre os pontos A e C devem ser iguais ou seja:

$$\Delta S'^2_{AC} = \Delta S^2_{AC}$$

Assim:

$$l'^2 = -(ct)^2 + x_0^2$$
$$l'^2 = -(\beta l_0)^2 + l_0^2$$
$$l'^2 = l_0^2(1-\beta^2)$$
$$l' = (1-\beta^2)^{1/2} l_0 = \frac{l_0}{\gamma}$$

$l' = \frac{l_0}{\gamma}$, $\gamma \geq 1 \Leftrightarrow l' \leq l_0$

A barra possui comprimento menor para o ref. em movimento!

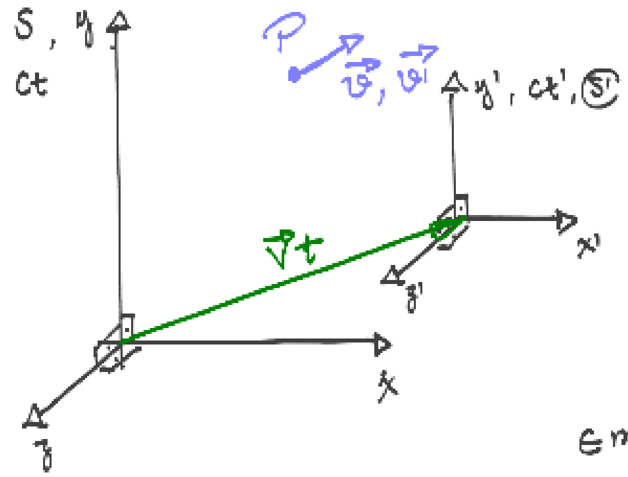
Parece haver uma contração do espaço na direção do Boost, essa é a chamada Contração espacial de Fitzgerald-Lorentz

⇨ Como trabalho de casa faça o cálculo para o caso inverso em que a barra está em repouso no referencial em movimento S' e possui comprimento próprio l_0. O resultado ou conclusão será que o sistema é totalmente simétrico e o ref. Ⓢ medirá um comprimento menor $l = \frac{l_0}{\gamma}$.

Então não há choro nem vela o objeto sempre terá seu comprimento na direção do boost menor, se comparado ao comprimento quando parado (comprimento próprio l_0)

8.8 ↦ Composição de velocidades relativísticas

Considere um referencial inercial em repouso Ⓢ. Uma partícula P se move com velocidade constante $\vec{v}$ com relação à este referencial. Um outro observador Ⓢ' se move c/ velocidade $\vec{V}$ com relação à Ⓢ numa direção qualquer. Que velocidade da partícula P mede o observador Ⓢ'?



Assim temos:

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k}$$
$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$
$$\vec{v}' = v'_x\hat{\imath} + v'_y\hat{\jmath} + v'_z\hat{k}$$

ou ainda

Em Ⓢ $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

em Ⓢ' $\quad \vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{dx'}{dt'}\hat{\imath} + \frac{dy'}{dt'}\hat{\jmath} + \frac{dz'}{dt}\hat{k}$

⇨ Consideremos o Boost restrito à direção x ($\vec{V} = V_x\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$) onde as transformações conhecidas são:

$$x' = \gamma(-\beta cT + x) \leftrightarrow dx' = \gamma(-\beta c dt + dx)$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \leftrightarrow c dt' = \gamma(c dt - \beta dx)$$
$$y' = y \leftrightarrow dy' = dy$$
$$z' = z \leftrightarrow dz' = dz$$