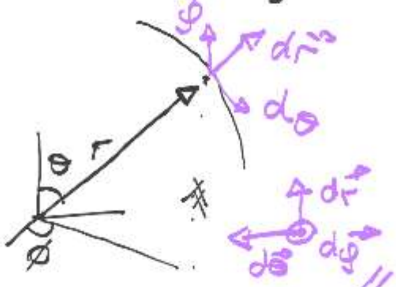
potencial dipolar $\Rightarrow$ $\Phi(r,\theta) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, Simetria em torno do eixo de Separação pg 44

Campo elétrico do dipolo $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right)} ,$$



CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}(r,\theta)$ E CURVAS DE EQUIPOTENCIAIS $\Phi(r,\theta) = \Phi_0$ de um dipolo elétrico.

Como o sistema tem simetria em torno de z, ou seja, independe da coordenada esférica φ, podemos descrever o campo e o potencial em qualquer plano c/ $\varphi = \varphi_0 = cte$, e depois rotacionar o sistema $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

* Para um plano φ qq temos:

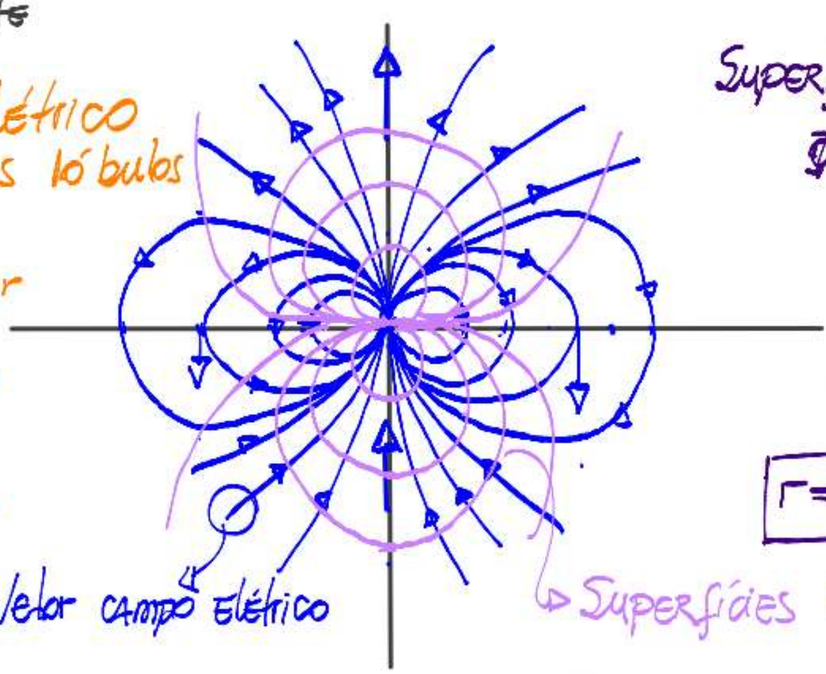
campo $\vec{E}(r,\theta)$, $\vec{E}(r,\pi/2)$, $\vec{E}(r,\pi)$, $\vec{E}(r,\pi/4)$

$\vec{E}(r,0) = E_0(2\hat{r})$, $E_0 = p/4\pi\varepsilon_0 r^3$

$\vec{E}(r,\pi/2) = E_0\hat{\theta}$, $\vec{E}(r,\pi) = -E_0 2\hat{r}$, $\vec{E}(r,3\pi/2) = -E_0\hat{\theta}$, $\vec{E} = E_0\frac{\sqrt{2}}{2}2\hat{r} + E_0\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta}$

plano $\varphi = cte$

O campo elétrico forma esses lóbulos na direção perpendicular ao eixo do dipolo $\vec{p}$



Vetor campo elétrico

Superfícies equipotenciais Φ_0

Superfícies equipotenciais

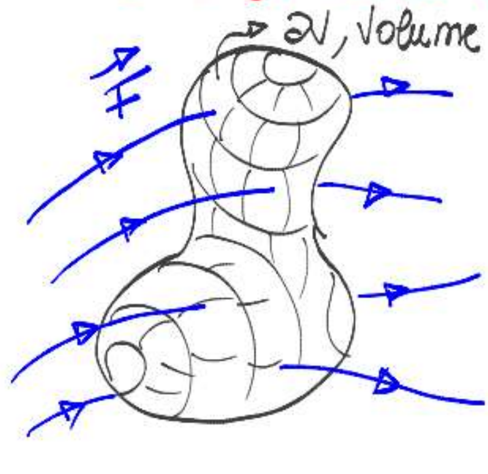
$\Phi(r,\theta) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \Phi_0$

$r^2 = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0\Phi_0}\cos\theta$

$r = \sqrt{\dfrac{p\,|\cos\theta|}{4\pi\varepsilon_0|\Phi_0|}}$

$$\boxed{r = r_0\sqrt{\cos\theta}} ,$$

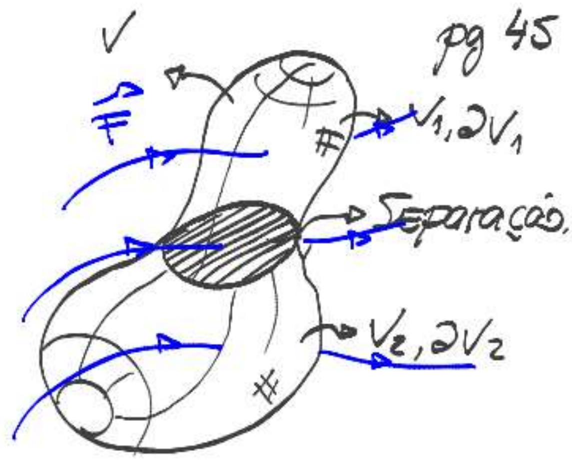
2.7 $\rightarrow$ Divergente de um Campo Vetorial



Vimos que o fluxo de um campo vetorial qualquer por uma superfície é dado por:

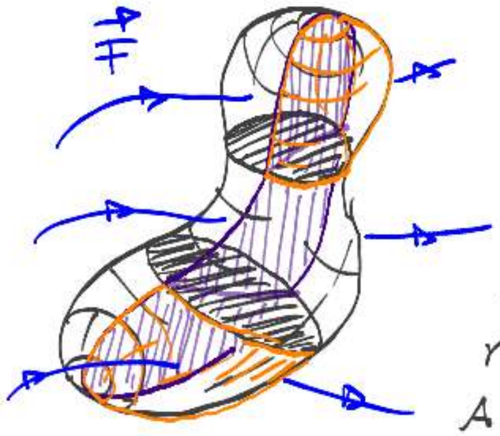
fluxo $\boxed{\Phi_{\partial V} = \oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{a}}$, vamos discutir esse problema no nível infinitesimal.

Vamos subdividir esse volume V em dois, V_1 e V_2 com limites superficiais ∂V_1 e ∂V_2, como um diafragma que separa os volumes, notemos que essa subdivisão, com relação ao fluxo de um campo $\vec{F}$ é dado por:



$$\oint_{\partial V_1} \vec{F}\cdot d\vec{a}_1 + \oint_{\partial V_2} \vec{F}\cdot d\vec{a}_2 = \oint_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{a},$$

isso é verdade pq ambos ∂V_1 e ∂V_2 compartilham a mesma barreira, onde o fluxo p/ cada área ∂V_1 e ∂V_2 são iguais em magnitude, mas com sinais opostos. Dessa forma a subdivisão pode continuar ocorrendo, sem alteração do fluxo total na área.



$$\oint_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\partial V_i} \vec{F}\cdot d\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \;//$$

Veja que cada subdivisão possui um volume variável V_i, mas cada subdivisão, com maior número de V_i, $N \to$ número grande a razão entre o fluxo de cada elemento ∂V_i, por V_i se torna uma informação de densidade volumétrica do fluxo do campo vetorial associado à um ponto no espaço veja:

$$\frac{1}{V_i} \oint_{\partial V_i} \vec{F}\cdot da_i = \text{densidade volumétrica de fluxo do campo } \vec{F},$$

Quanto maior a granularidade do volume ou seja quanto mais subdividirmos $V, \partial V$ mais perto da informação do ponto (x,y,z) temos acesso.

Em um ponto (x,y,z), definimos:

se $N \to \infty$
$$\lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \oint_{\partial V_i} \vec{F}\cdot d\vec{a}_i = \text{divergente } \vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

Definição do divergente de uma função vetorial. É uma quantidade escalar depende da posição (x,y,z)

2.3 → Lei de Gauss na forma diferencial.

Vimos na seção anterior que a definição de divergente de uma função vetorial $\vec{F}$ é dada por $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ e e representa a densidade volumétrica de fluxo desse mesmo campo num ponto (x, y, z) no espaço.

A forma matemática do divergente ou melhor, do operador divergente e coordenadas cartesianas é tal que $\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

Se $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

↳ quantidade escalar.

Assim temos que:

$$\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N}\oint_{\partial V_i}\vec{F}\cdot d\vec{a}_i \times\left(\frac{V_i}{V_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} V_i\left[\frac{1}{V_i}\oint_{\partial V_i}\vec{F}\cdot d\vec{a}_i\right]$$

No caso em que se $N \to \infty$, $V_i \to 0$

$$\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{a} = \lim_{V_i\to 0}\sum_{i=1}^{N} V_i\left[\frac{1}{V_i}\oint_{\partial V_i}\vec{F}\cdot d\vec{a}_i\right] = \oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, d\tau$$

$$\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{a} = \oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, d\tau$$

, Esse é o famoso teorema do divergente, ou teorema de Gauss.

No nosso caso eletrostático em que algum sistema de distribuição de cargas conhecido ou não cria no espaço um campo vetorial $\vec{E}(x,y,z)$. O teorema é válido para qualquer campo vetorial $\vec{F}$, assim podemos escrever.

$$\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a} = \oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$$, mas já vimos que $\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, d\tau$

Então:

$$\oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho\, d\tau = \oint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau$$, que é verdadeiro se em todo ponto a relação seguinte é verdadeira

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

, Essa é a lei de Gauss em sua forma diferencial.

O operador em coordenadas esféricas é dado por:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial(sen\theta F_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$ //

Exemplo: Vamos ver se tudo se encaixa neste quebra-cabeças, vamos calcular o $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ para o campo elétrico criado no interior $r \leq R$ e no exterior de uma distribuição esférica uniforme ρ. Lembre-se que o $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ é uma função do ponto (x,y,z). Raio R

$$\rho = \frac{Q\,3}{4\pi R^3}$$

O campo criado por esfera com densidade ρ.

$$Q = \frac{4\pi R^3\rho}{3}$$

$$\rho \to \begin{cases} \rho, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} = \frac{4\pi R^3\rho}{3\,4\pi r^2}\hat{r} = \frac{R^3\rho}{3r^2}\hat{r}, \quad r > R$$ //

para $r \leq R \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\hat{r}}$ //

Assim temos que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ para um ponto fora da esfera é dado por:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\frac{R^3\rho}{3\cancel{r^2}}\right) = \frac{1}{r^2}(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0}$$

Note que essa relação está em total acordo com a lei de Gauss em sua forma diferencial. $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$, fora da esfera $\boxed{\rho = 0}$ //

No interior da distribuição temos: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^3\rho}{3\varepsilon_0}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{r^2}}3\cancel{r^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ // p/ $r \leq R$.

$\Rightarrow$ Já vimos que o campo vetorial elétrico pode ser encontrado a partir do campo de potencial escalar Φ, assim temos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \Leftrightarrow \text{operador } \vec{\nabla}\cdot \text{ pela esquerda} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi}$$ //

Vimos também que de forma geral $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -\nabla^2\Phi = \rho/\varepsilon_0 \to \boxed{\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0}$$ $\to$ Equação de Poisson

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ $\equiv$ Operador Laplaciano em coordenadas cartesianas.

Em coordenadas esféricas temos

$$\nabla^2 f \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Quando há uma distribuição $\rho(r)$ no espaço a solução Φ para a equação de Poisson descreve o campo $\vec{E}$. A análise do campo numa região s/ densidade de carga é então $\nabla^2\Phi = 0$, veja que os diferenciais $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$, $\vec{\nabla}\Phi$, $\nabla^2\Phi$ dependem do ponto (x,y,z). Então fora de uma distribuição temos:

$$\nabla^2\Phi = 0 \iff \nabla^2\Phi(x,y,z) = 0$$

chamada de equação de Laplace.

2.9 ⟶ O Teorema de Stokes

Como vimos nas seções anteriores o teorema do divergente ou teorema de Gauss é uma ferramenta muito poderosa. E ajuda de forma direta na redução da integral de uma grandeza vetorial de volume p/ área ou vice-versa, uma delas pode ser mais simples de resolver:

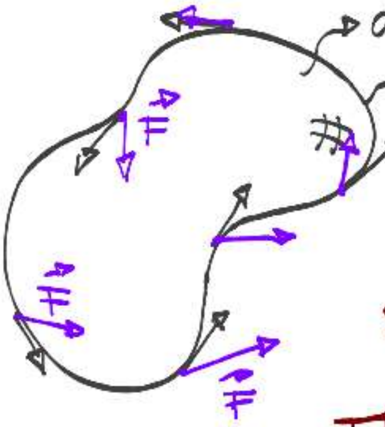
$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{a} = \int_S \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv}$$

Outra ferramenta de igual importância é o teorema de Stokes que converte integrais de áreas em integrais de linha ou vice-versa. Segue uma discussão simplificada do teorema:

Primeiro vamos definir o rotacional de um campo vetorial ($\vec{\nabla}\times\vec{F}$).

área S ⟶ Consideremos uma superfície aberta qualquer, S, essa superfície é limitada por sua borda ∂S

Consideremos que no espaço onde existe essa superfície há um campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)$ que permeia o espaço e cruza essas superfícies em todos os seus pontos (pontos que pertençam à superfície).



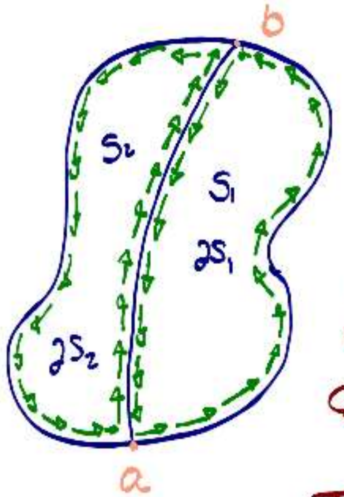
$\leadsto \oint_{\partial S} d\vec{s} \equiv$ Comprimento da borda

Vamos calcular ao longo desta borda ∂S a seguinte quantidade:

$$T = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$\Rightarrow$ Essa é uma integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de ∂S, seu resultado é a integral de todo componente de $\vec{F}$ na direção de $d\vec{s}$, ou seja a componente de $\vec{F}$ que "circula" a borda de S, chamemos essa quantidade T de circulação de $\vec{F}$ na borda ∂S.

Vamos agora adotar o mesmo procedimento que fizemos com o volume no caso do divergente, vamos subdividir essa área!

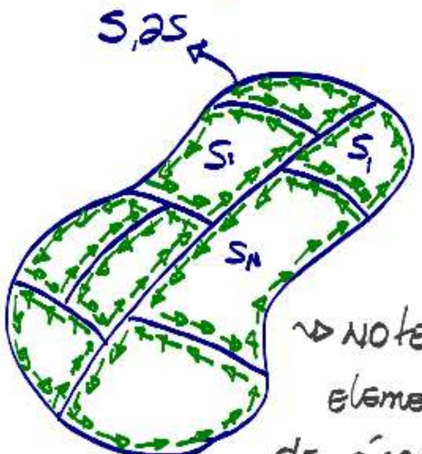


A linha $\overline{ab}$ subdivide a área S em S_1 e S_2, com bordas ∂S_1 e ∂S_2, contudo a linha $\overline{ab}$ é a borda compartilhada pelas áreas S_1 e S_2.

Note a circulação T_{S_1} e T_{S_2} na linha $\overline{ab}$ são iguais mas com sinais opostos, assim podemos escrever que a circulação ~~total~~ T é dada pela circulação das áreas criadas:

$$T = T_1 + T_2 \mapsto \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 + \oint_{\partial S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 \quad //$$

* Note que podemos continuar essa subdivisão o quanto queiramos N (subdivisões).



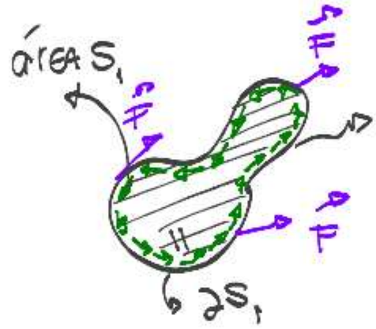
As multiplas subdivisões da área S não modificam a circulação T sendo a soma das circulações T_i, assim temos:

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\partial S_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i} \quad //$$

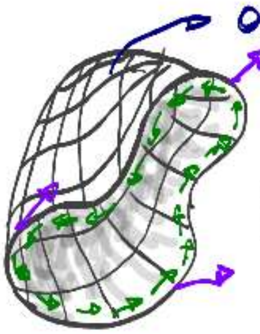
$\rhd$ Note cada "novo" elemento granular de área $\vec{a}_i$ é um vetor.

Quando aumentamos N, o elemento $\vec{a}_i$ fica cada vez mais próximo de um elemento de área infinitesimal $d\vec{a}_i$.

Observamos portanto que a circulação Γ numa borda ∂S é independente da área S limitada por ∂S, veja:



c/ circulação $\Gamma = \oint_{\partial S_1} \vec{F}\cdot d\vec{s}$



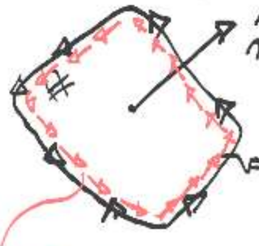
outra superfície S_2, c/ outra área total S_2

A circulação na borda permanece inalterada

$$\oint_{\partial S_1} \vec{F}\cdot d\vec{s}_1 = \oint_{\partial S_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}_2 \quad //$$

$$S_1 \neq S_2$$

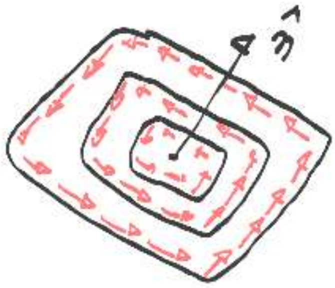
Ao avançar na granulação de qualquer superfície, acabamos com elementos de área $\vec{a}_j$ cada vez menores. A orientação da área segue a regra da mão direita.



aumentar a granulação a circulação Γ diminui, mas também diminui a área $\vec{a}_j$

$\vec{a}_j = a_j \hat{n}$

Sentido de $d\vec{s}$ (regra da mão direita)



No limite em que $\vec{a}_j \to 0$, a circulação é de um ponto. Vamos definir uma quantidade que é a razão entre a circulação Γ_i e a área $\vec{a}_i$ (semelhante ao volume do divergente). Essa quantidade, no entanto, deve ser vetorial pq podemos p/ qualquer ponto (P) passar uma área de mesma circulação.

Definimos a razão: $\dfrac{\Gamma_i}{a_i}$ → no limite → $\lim\limits_{a_i \to 0} \dfrac{\Gamma_i}{a_i} = \lim\limits_{a_i \to 0} \dfrac{\oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{s}_i}{a_i} \quad //$

* No limite, essa informação passa a ser uma informação do ponto (x,y,z).

⇒ Como $\vec{a}_j$ pode "apontar" p/ qualquer direção, a quantidade acima é a componente de um vetor na direção de $\hat{n}$, assim definimos o produto vetorial como:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n} = \lim_{a_i \to 0} \frac{1}{a_i}\oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{s}_i \quad ,$$

$$\boxed{(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}_i = \frac{\Gamma_i}{a_i}} \quad //$$

Da circulação total temos:

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\Gamma_i}{a_i} = \sum_{i=1}^{N} a_i (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}_i$$

no limite em que $a_i \to 0$ ou $N \to 0$, integramos

$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{a}$$, Teorema de Stokes

* Lembrando que o operador rotacional $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ de função vetorial é em coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$, Resultado desta determinante é um vetor.

Resumo: O Produto Vetorial é uma densidade superficial de circulação em um ponto (x,y,z) associado à um campo vetorial.