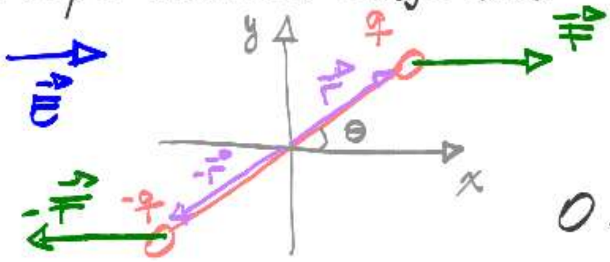
Vamos calcular o torque sobre o dipolo inverso num campo elétrico uniforme $\vec{E} = cte$.



Força sobre as cargas $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$

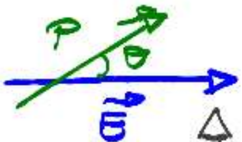
O torque é dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ //

Ou ainda, o torque total sobre o sistema é $\vec{\tau}_T = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, assumamos o ponto médio de separação entre as cargas. Assim temos:

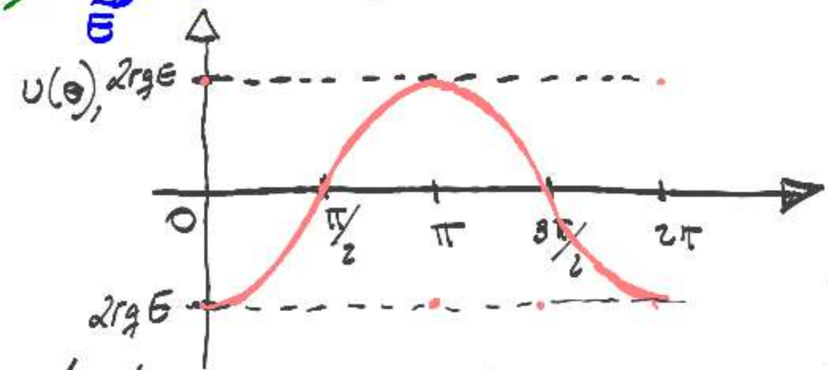
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} + (-\vec{r}) \times (-\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} = 2\vec{r} \times \vec{F} = 2\vec{r} \times (q\vec{E})$$

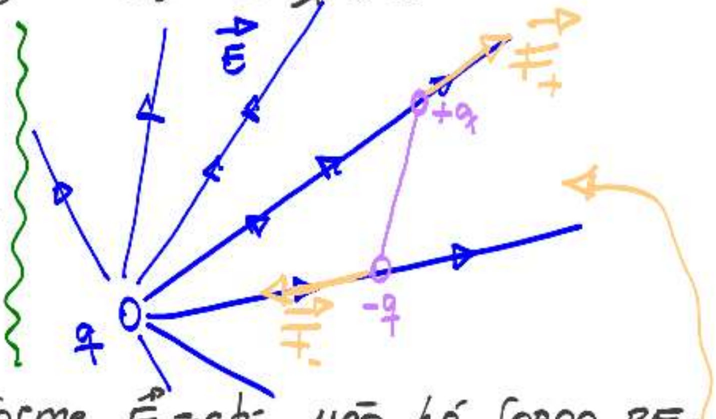
$$\vec{\tau} = q2\vec{r} \times \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}} \, , \quad \boxed{\vec{p} = 2q\vec{r}} \, //$$

Energia do dipolo no campo $\vec{E}$ $\rightarrow$ $\boxed{U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$



$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\theta \, , \quad U(\theta) = -2rqE\cos\theta$$





Lembre-se que p/ o campo uniforme $\vec{E} = cte$ não há força resultante atuando sobre o dipolo. O mesmo não é verdade para um dipolo num meio com campo radial por exemplo. Mesmo no caso uniforme o torque nos dipolos pode causar uma dissipação de energia no dielétrico na forma de calor.

O modelo atômico/molecular mais atual mostra que há uma região orbital onde o elétron pode estar na molécula, essa região com certa "densidade de probabilidade" $|\psi(\vec{r})|^2$ é a núvem eletrônica. Mesmo numa molécula/átomo apolar, essa núvem pode ser distorcida criando um "dipólo induzido" na presença de campo elétrico $\vec{E}$. Regra geral esse dipolo induzido $\vec{p}$ é proporcional ao campo $\vec{E}$ pela polarizabilidade α do elemento. $\vec{p} = \alpha\vec{E}$

Vimos que nossos capacitores são em geral placas paralelas com certa carga Q sob uma diferença de potencial Φ. A presença de um material dielétrico entre as placas altera o capacitor de duas formas:

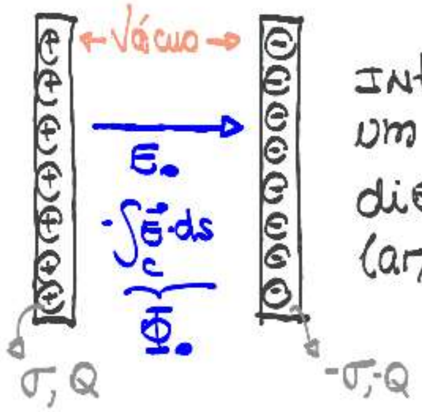
1) Se as placas são mantidas à um potencial fixo/constante com ajuda de uma bateria, as cargas nas placas do capacitor aumentam $Q = KQ_o$, aumentando também a capacitância $C = KC_o$.

2) Se os capacitores possuem carga Q e não estão ligados à uma bateria, após a introdução do dielétrico não altera a carga Q, porém reduz a diferença de potencial entre as placas $\Phi = \Phi_o/K$, aumentando a capacitância $C = KC_o$.

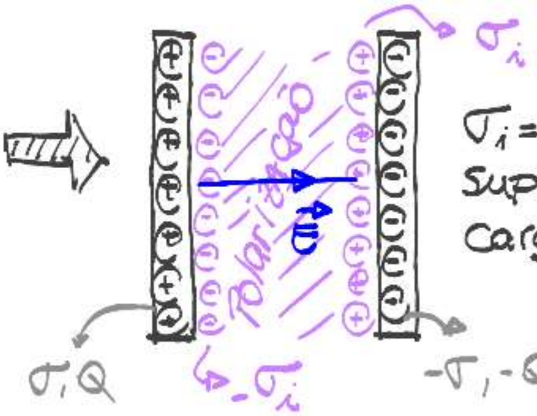
Lembrando que K, a constante dielétrica é uma característica do material.

O campo elétrico no interior do dielétrico $\vec{E}$

sem dielétrico (vácuo) | material dielétrico



Introduzimos um material dielétrico (ar/borracha/etc..)



σ_i = densidade superficial de carga induzida.

$\boxed{\vec{E} \neq \vec{E}_o}$ //

Como $\Phi_o = -\int_c \vec{E}_o \cdot ds$ e $\Phi = \int_c \vec{E}\cdot d\vec{s}$, como $\Phi = \Phi_o/K$

temos que: $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_o/K}$, o campo reduz em intensidade pelo fator K. Podemos então escrever:

$E_o = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ e $E = \dfrac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_o}$, σ = densidade de cargas "livres"
σ_i = densidade de cargas ligadas

$$\frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_o} = \frac{E_o}{K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_o} \rightarrow \boxed{\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right)} //$$

Quanto melhor o isolante, maior o valor de K, assim para ótimos isolantes K é grande e $\sigma_i \to \sigma$, e $E \to 0$.
Podemos simplificar e escrever:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{K}\right) = \cancel{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} - \cancel{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

$\sigma \equiv$ densidade superficial de cargas livres

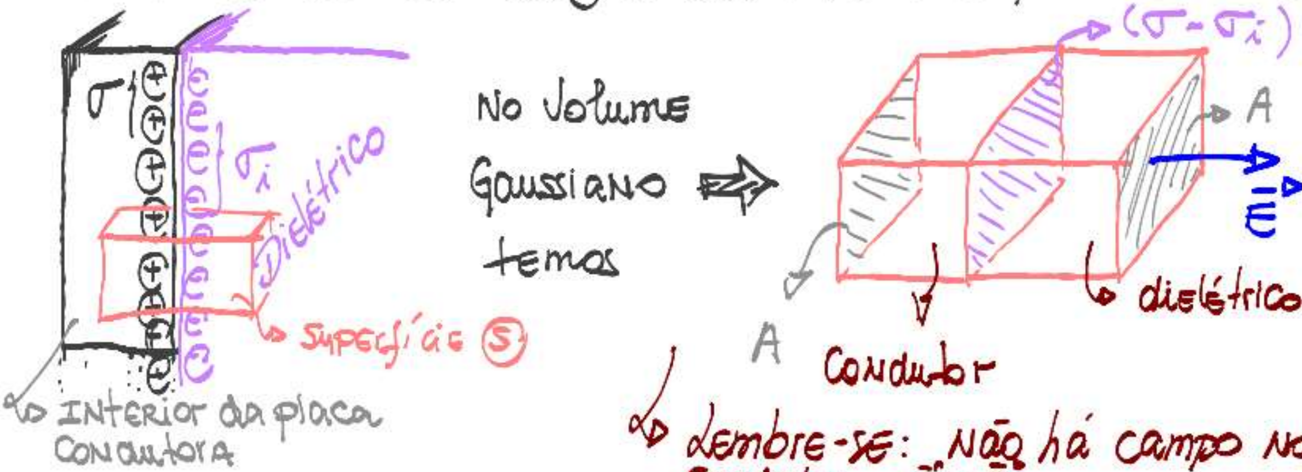
$\varepsilon = K\varepsilon_0 \equiv$ permissividade elétrica do dielétrico //

⇒ Densidade de energia μ_E

Vácuo $\to$ $\mu_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ // , no dielétrico $\to$ $\mu_E = \frac{\varepsilon E^2}{2}$ //

Lei de Gauss no meio dielétrico.

→ Consideremos as cargas sob uma das placas do Capacitor



↳ Lembre-se: Não há campo no interior do condutor $\vec{E} = \vec{0}$.

Aplicando a Lei de Gauss temos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma - \sigma_i) \cdot A}{\varepsilon_0} \quad , \text{mas} \quad \sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} A\left(\sigma - \sigma + \frac{\sigma}{K}\right) = \frac{\sigma A}{K\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon} = \frac{q_{interna\text{-}livre}}{\varepsilon}$$

Veja que para o campo elétrico no interior de um dielétrico, podemos reescrever a lei de Gauss em função apenas das cargas livres e da constante dielétrica.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{livre}}{\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon = K\varepsilon_0 \quad //$$

3.8 → Associação de capacitores - capacitância equivalente pg67

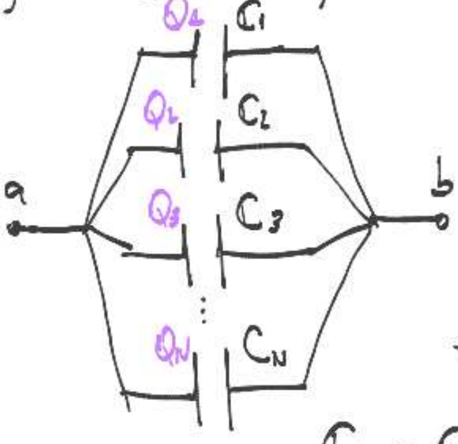
Um capacitor pode ser usado como elemento elétrico de um circuito. Esses elementos podem ser conectados (associados) de forma que a capacitância total seja maior ou menor que a capacitância individual dos elementos. É claro que a associação correta depende do objetivo do circuitos. Apesar dessas conexões poderem possuir qualquer nível de complexidade, existem associações que não podem ser reduzidas entre série/paralelo, como as pontes de Winston.

3.8.1 → Associação em paralelo de capacitores

- A representação gráfica de um capacitor de capacitância $\mathbb{C}$ é:

, terminais a, b (condutores fio)

Dizemos que um conjunto de capacitores está em paralelo quando seus terminais estão sobre a mesma diferença de potencial Φ. Assim temos,



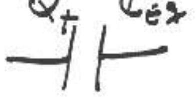
Lembrando que: $\mathbb{C} = Q/\Phi$, $\mathbb{C}_i = Q_i/\Phi_i$
mas $\Phi_i = \Phi$ p/ $i \in \{1, N\}$, $\Phi = \dfrac{Q_i}{\mathbb{C}_i}$

A carga total é $Q_T = \sum_{i=1} Q_i$

A capacitância equivalente $\mathbb{C}_{eq}$ é então:

$$\mathbb{C}_{eq} = \frac{Q_T}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}\sum_{i=1}^{N} Q_i = \frac{1}{\cancel{\Phi}}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{C}_i \cancel{\Phi} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{C}_i$$

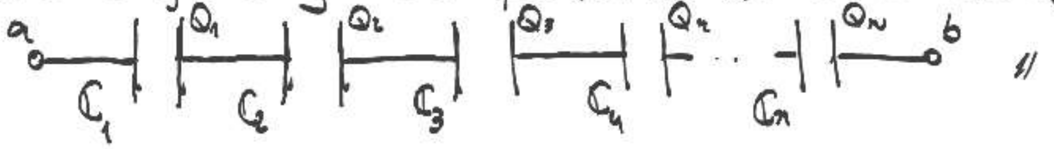
Assim o circuito acima representa fisicamente um capacitor de capacitância equivalente $\mathbb{C}_{eq}$ dado por



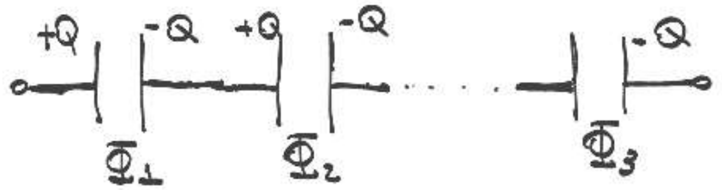
$$\Rightarrow \quad \mathbb{C}_{eq} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{C}_i = \mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2 + \ldots + \mathbb{C}_N$$

3.8.2 → Associação em série de capacitores

Vamos considerar um conjunto de capacitores em série quando são conectados em série (terminal com terminal) entre uma certa diferença de potencial. Como diagrama a seguir:



Se o capacitor era inicialmente neutro a carga final deve ser nula.



, $\Phi_i = \dfrac{Q}{C_i}$ //

Neste caso a carga armazenada em cada um dos capacitores é a mesma. E a diferença de potencial total é a soma das diversas quedas de potencial.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

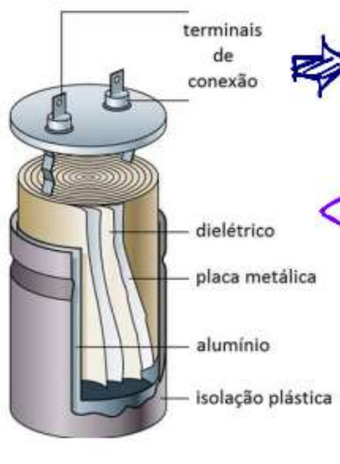
, A capacitância equivalente é então $C_{eq} = Q/\Phi$ ou ainda

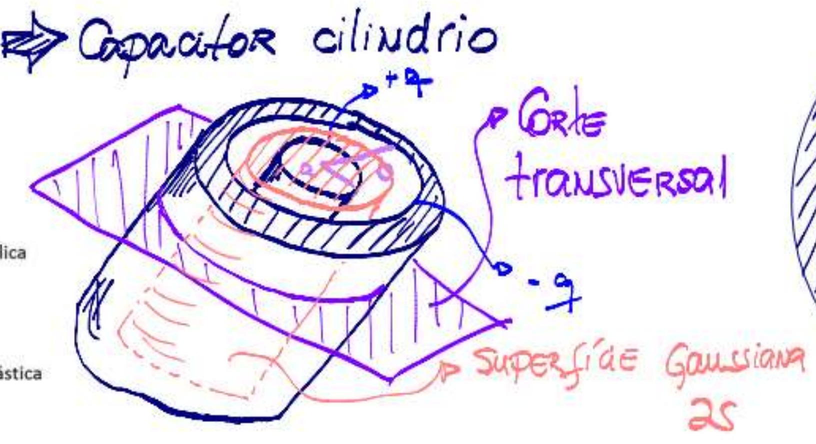
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Phi}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

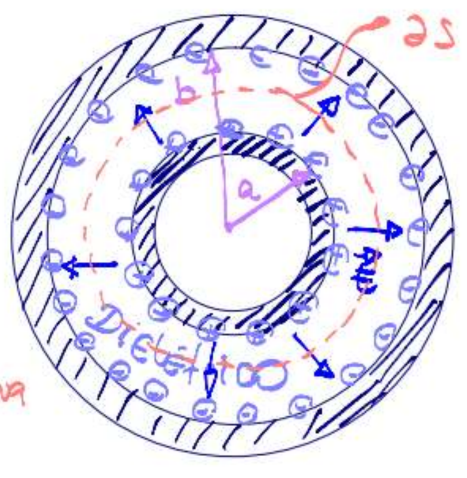
, ou seja a capacitância equivalente no sistema em série é:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}}$$ //

Exemplo: Vamos calcular a capacitância de um capacitor cilíndrico, como da figura abaixo. Consideremos que o condutor cilíndrico interno possui raio maior a, e o condutor cilíndrico externo e o condutor cilíndrico externo com raio menor b. Num primeiro momento considere o capacitor vazio, depois considere que um dielétrico de constante k é introduzido entre os cilindros. De quanto varia a capacitância do sistema?







A capacitância do sistema é dada pela razão entre a carga Q e a diferença de potencial entre as camadas (a,b), Φ_{ba}. O campo elétrico pode ser calculado pela lei de Gauss, devido a alta simetria do sistema. E desprezando efeitos de borda (anisotropia do campo elétrico), temos: pg69

$$\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E\oint_{\partial S} da = \frac{q}{\varepsilon_0} : E\,2\pi r\ell = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\frac{1}{r}\hat{r}}$$

A diferença de potencial é dada por:

$$\Phi_{ba} = \Phi(b) - \Phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\int_a^b \frac{1}{r'}dr' = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\ln(r)\Big|_a^b = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Phi_{ba} = \Phi_b - \Phi_a = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0\ell}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A capacitância é dada por $C = q/|\Phi_{ba}|$, assim temos:

$$C = \frac{\cancel{q}\,2\pi\varepsilon_0\ell}{\cancel{q}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln(b/a)}}$$

Note que a capacitância depende apenas das características geométricas do capacitor (a, b, ℓ)

⇒ Ao adicionar um dielétrico entre as placas do capacitor, o campo elétrico se altera de $\vec{E}$ p/ $\vec{E}'$. Pela lei de Gauss temos:

$$\oint_{\partial S} \vec{E}'\cdot d\vec{a} = \frac{q_{int\text{-}livre}}{\varepsilon} = \frac{q}{K\varepsilon_0} = E'\int_{\partial S_\ell} da = \frac{q}{K\varepsilon_0} = E\,2\pi r\ell = \frac{q}{K\varepsilon_0},\quad E = \frac{q}{2\pi r\ell K\varepsilon_0}$$

O campo elétrico é então reduzido por um fator K, que é a constante dielétrica. A diferença de potencial fica:

$$\Phi'_{ba} = \Phi(b) - \Phi(a) = -\int_C \vec{E}'\cdot d\vec{r} = -\frac{q}{2\pi\ell K\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r'}\hat{r}\cdot dr\hat{r} = \frac{-q}{2\pi\ell K\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_a^b$$

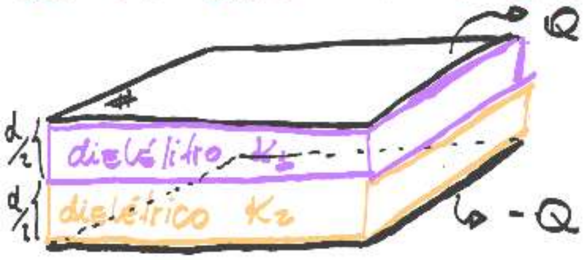
$$\Phi'_{ba} = \frac{-q}{2\pi\ell K\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right),\ \text{p/ o campo radial } \vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\ell K}\frac{1}{r}\hat{r}$$

A nova capacitância $C' = q/|\Phi'_{ba}|$, e temos:

$$C' = \frac{q}{|\Phi'_{ba}|} = \frac{q}{q}\frac{2\pi\ell K\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = K\frac{2\pi\ell\varepsilon_0}{\ln(b/a)} = KC \quad \boxed{C' = KC}$$

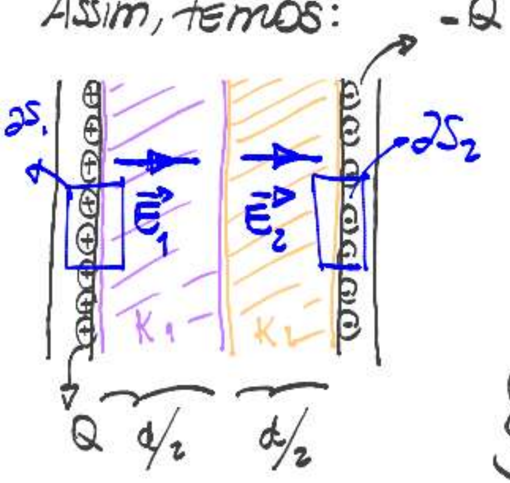
→ Note que como esperado a capacitância final do circuito é maior por um fator K quando o dielétrico está presente.

\# Exemplo: Vamos discutir o caso de um capacitor que possui mais de um dielétrico entre suas placas, primeiro vamos examinar o caso abaixo:



⇒ Neste sanduíche de dielétricos devemos lembrar que a carga nas placas não muda, mas o campo $\vec{E}$ e a diferença de potencial se altera.

Assim, temos:



Aplicando a lei de Gauss p/ o condutor ① temos

$$\oint_{\partial S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} = \frac{q_{int\text{-}livre}}{\varepsilon} = \frac{\sigma . A}{K_1 \varepsilon_0} = E_1 . A \quad , \quad \boxed{E_1 = \frac{\sigma}{K_1 \varepsilon_0}}$$

No condutor ② temos

$$\oint_{\partial S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} = \frac{\sigma A}{K_2 \varepsilon_0} = E_2 A \rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma}{K_2 \varepsilon_0}}$$

A diferença de potencial entre as placas do capacitor é:

$$\Phi_{ba} = \Phi_b - \Phi_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^{d/2} E_1 . dx - \int_{d/2}^{d} E_2 dx = \frac{-\sigma}{K_1 \varepsilon_0} x' \Big|_0^{d/2} - \frac{\sigma}{K_2 \varepsilon} x \Big|_{d/2}^{d}$$

$$\Phi_{ba} = -\frac{\sigma d}{2 K_1 \varepsilon_0} - \frac{\sigma d}{K_2 \varepsilon_0} + \frac{\sigma d}{2 K_2 \varepsilon_0} = -\frac{\sigma d}{2 \varepsilon_0}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) = -\frac{\sigma d}{2 \varepsilon_0}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 . K_2}\right)$$

A capacitância do sistema é então calculada como:

$$C = \frac{q}{|\Phi_{ba}|} = \frac{q}{\sigma d} \frac{2 \varepsilon_0 K_1 . K_2}{(K_1 + K_2)} = \frac{2 \varepsilon_0 \cancel{q} A}{\cancel{q} . d} \frac{K_1 K_2}{(K_1 + K_2)} = \frac{2 \varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) //$$

Vamos comparar com a capacitância de um capacitor C_1 com dielétrico K_1 separados por $d/2$. Neste caso temos:

$$C_1 = \frac{q}{|\Phi|} = \frac{q \, \varepsilon_0 2}{\sigma d} = \frac{A q \, \varepsilon \, 2 K_1}{q \, d} = \frac{2 \varepsilon_0 K_1 A}{d} //$$

O mesmo para K_2, $C_2 = \dfrac{2 \varepsilon K_2 A}{d}$

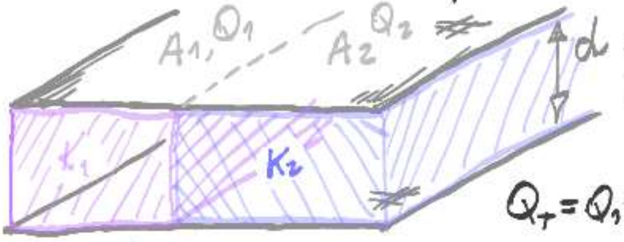
Assim veja:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{2 \varepsilon A}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) = \frac{d}{2 \varepsilon A}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}\right) ; \quad \boxed{\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}} //$$

→ dielétricos em "série"

Note, portanto, que a associação em "série" dos dielétricos pode ser substituída por uma capacitância c/ a constante dielétrica equivalente K_{eq}. pg71

Continuação do exemplo anterior: Vamos considerar um segundo caso, onde os materiais dielétricos são dispostos em "paralelo" no interior do capacitor.

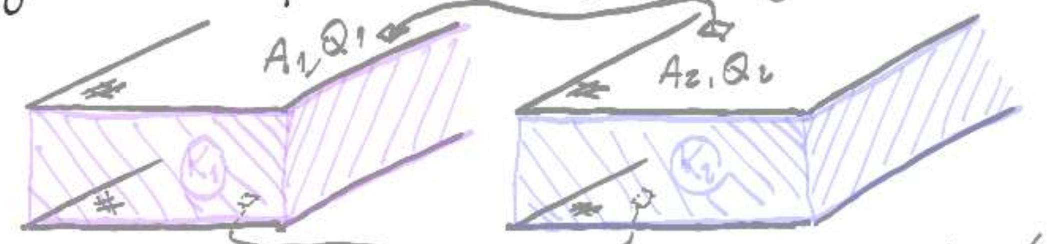


A capacitância inicial sem dielétricos é

$$C = \frac{Q_1+Q_2}{\Phi} = \frac{Q_T}{\Phi} = \frac{(A_1+A_2)\varepsilon_0}{d} = \frac{A_T\varepsilon_0}{d}$$

$Q_T = Q_1+Q_2$ (carga total), $A_T = A_1+A_2$ (área total)

→ Lembre-se que os condutores são superfícies equipotenciais, portanto, o campo elétrico $\vec{E}_i$ e as cargas Q_i em cada parte das placas se modifica de forma a manter a diferença de potencial constante. Assim, temos na prática 2 capacitores ligados em paralelo veja.



$$C_1 = \frac{K_1\varepsilon_0 A_1}{d}$$

$$C_2 = \frac{K_2\varepsilon_0 A_2}{d}$$

Vimos que uma associação em paralelo de capacitores pode ser calculado como:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = K_1\frac{A_1\varepsilon_0}{d} + K_2\frac{A_2\varepsilon_0}{d} = K_{eq}\frac{A_T\varepsilon_0}{d}$$

Desprezando efeitos de borda ficamos com:

$$A_T K_{eq} = A_1 K_1 + A_2 K_2, \quad \text{onde} \quad A_T = A_1 + A_2$$

$$K_{eq} = \left(\frac{A_1}{A_1+A_2}\right)K_1 + \left(\frac{A_2}{A_1+A_2}\right)K_2,$$

se $A_1 = A_2$, temos

$$K_{eq} = \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2} = \frac{1}{2}(K_1+K_2),$$

a média aritmética das constantes dielétricas K_i.